

102  
21 世纪固体力学丛书

# 非线性空间结构力学

贾乃文 著



A0965797

科学出版社

2002

## 内 容 简 介

本书对悬索与索网、网架与网壳、圆板与折板、旋转壳与扁壳屋盖等空间结构,在介绍其线弹性力学计算基础上,主要阐述它们的非线性力学计算理论和工程塑性设计方法。本书反映了空间结构力学方面的最新成果,开拓了空间结构和特殊结构的非线性设计。书中有较多的算例供学习者参考,并有附录讲述与本书有关的数学分析方法。

本书可作为高等院校力学、土建等专业研究生和本科生的教学参考书,也可供从事结构设计的工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

非线性空间结构力学/贾乃文著. —北京:科学出版社,2002  
(21世纪固体力学丛书)  
ISBN 7-03-010102-2

I. 非… II. 贾… III. 空间结构-结构力学 N. TU399

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 004196 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002年6月第 一 版 开本:720×1000 B5

2002年6月第一次印刷 印张:19 3/4

印数:1—3 500 字数:381 000

定价:32.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈兰各〉)

## 《21 世纪固体力学丛书》编委会

**主 编**      黄培彦

**副主编**      韩 强

**编 委**      (以姓氏笔画为序)

汤立群    陈国华    罗 毅

贺玲凤    贾乃文    曾庆敦

## 总 序

自从产业革命以来,在工业技术的发展中,力学曾大显身手。特别是 20 世纪中叶以来,近代力学基础性、探索性的超前研究曾对当代产业例如航空、航天工业的发展起到过主导的作用。从固体力学取得了令人瞩目的成就。

随着知识经济和信息时代的到来,21 世纪我国经济建设将会加速发展。一大批高新技术产业和跨世纪骨干产业的形成,将会带来许多新的复杂的工程实际问题,这不仅为固体力学提供了大量的新课题,而且亦成为固体力学学科发展的新动力。固体力学既要适应生产实际的发展,面向工程实际,解决生产难题,同时亦应从工程实际中提炼出具有普遍性的问题进行系统的研究,促进各分支学科的成长,从而推动整个固体力学学科的发展。

中青年学者尤其青年学者是 21 世纪我国固体力学研究领域的主力军。目前,一大批优秀的青年学者已经成长为新一代的学科带头人,活跃在固体力学的诸多前沿研究领域。由他们联合撰写的固体力学系列专著,从各自不同的研究角度出发,反映了最新的研究成果及其发展趋势,对该学科的发展具有重要的影响和参考价值。毫无疑问,《21 世纪固体力学丛书》在这方面做了一个很好的尝试。

《21 世纪固体力学丛书》围绕固体力学的若干前沿研究领域,基于近代固体力学理论的最新研究成果,在结构的疲劳设计、概率断裂力学、复合材料强度理论、非线性力学以及新的实验测试技术等方面进行了系统的总结。该丛书不仅阐述了基本概念、基本理论、基本方法,而且有许多内容是作者们多年来卓有成效的研究成果,具有理论与应用并重的特色。丛书有助于初次涉足这一领域的学生和研究人员在较短的时间内从较高的起点上开展固体力学的研究工作。

我相信,《21 世纪固体力学丛书》的出版将会对固体力学的理论研究和工程应用发挥积极的促进作用。

高镇同

2001 年 12 月



## 前 言

结构的大跨度和材料的高强度是 21 世纪结构设计的方向之一。基于材料物理非线性的结构塑性设计研究,尤其是大跨度空间结构的塑性设计的研究具有划时代意义。本书仅是在这方面的一种探索。

本书共有八章及一个附录,主要包括悬索、索网、网架、圆板、折板、旋转壳、扁壳、网壳等结构,并简单介绍了上述结构在线弹性范围内力学分析的经典理论,着重阐述了它们的非线性力学计算理论,例如考虑材料的塑性强化效应的结构设计,与结构极限破坏状态相吻合的塑性极限分析,考虑几何非线性与各向异性的结构力学计算等。本书的主要内容是在作者多年从事非线性空间结构力学研究的成果基础上,经过加工、提炼而系统集成的。本书在写作时,注重由浅入深、循序渐进,书中还配有大量的设计计算例题供读者参考。本书可作为高等学校力学、土建等专业研究生、本科生的教学参考书,也可供结构设计人员参考。

在本书出版之时,作者要特别感谢董石麟院士的关心和支持,同时感谢为本书出版作出贡献的同仁与家人。

限于作者的能力与水平,书中错漏在所难免,欢迎读者批评指正。

# 目 录

## 总序

## 前言

<b>第一章 非线性悬索结构</b> .....	1
1.1 单索的一般方程 .....	1
1.2 辐射式悬索结构 .....	8
1.3 非线性悬索结构的方程.....	13
1.4 辐射式双层悬索结构的塑性计算.....	16
1.5 非线性悬索的变分原理.....	19
1.6 悬索的塑性强迫振动.....	24
<b>第二章 非线性索网结构</b> .....	28
2.1 正交索网的基本方程.....	28
2.2 鞍形索网的弹性计算.....	33
2.3 非线性材料索网的差分计算.....	38
2.4 鞍形索网的塑性计算.....	41
2.5 非线性索网结构的变分解法.....	45
2.6 索网结构的塑性强迫振动.....	49
<b>第三章 非线性平板网架结构</b> .....	54
3.1 平板网架的差分计算.....	54
3.2 平板网架的拟板计算.....	64
3.3 网架结构的非线性分析.....	70
3.4 三向网架的塑性计算.....	74
3.5 网架非线性分析的变分方法.....	78
3.6 三向网架的塑性变分解法.....	81
3.7 网架结构的塑性极限分析.....	84
3.8 正交异性圆形网架塑性设计.....	88
<b>第四章 非线性圆形板结构</b> .....	94
4.1 柱坐标下圆形板的一般解.....	94
4.2 弹性地基柱坐标下圆形板的解 .....	101
4.3 非线性大变形圆形板的精确解 .....	108
4.4 圆形板的塑性极限分析 .....	112
4.5 组合受力圆形板的塑性极限分析 .....	116

4.6	环形板的塑性弯曲 .....	119
4.7	非线性硬化环形板塑性弯曲 .....	124
4.8	正交异性非线性变厚环形板 .....	128
4.9	正交异性环形板塑性极限分析 .....	132
4.10	曲线形板塑性极限分析 .....	136
<b>第五章</b>	<b>非线性折板结构 .....</b>	<b>140</b>
5.1	矩形板的经典解法 .....	140
5.2	矩形板封闭折板结构 .....	143
5.3	变厚度矩形板封闭折板结构 .....	148
5.4	拱与拱型折板结构 .....	154
5.5	拱型折板结构的刚架解法 .....	160
5.6	变厚度拱型折板结构 .....	164
5.7	拱型折板结构的塑性极限分析 .....	171
5.8	各向异性拱型折板结构 .....	176
<b>第六章</b>	<b>非线性旋转壳结构 .....</b>	<b>183</b>
6.1	旋转壳的基本方程 .....	183
6.2	圆柱壳水箱结构的内力分析 .....	188
6.3	圆柱壳水箱结构的精确方法 .....	194
6.4	球壳结构的有矩计算 .....	200
6.5	非线性变厚度球壳结构 .....	204
6.6	变厚度圆锥壳结构 .....	208
6.7	旋转壳结构的优化设计 .....	215
6.8	旋转壳结构的塑性极限分析 .....	220
<b>第七章</b>	<b>非线性扁壳及屋盖结构 .....</b>	<b>225</b>
7.1	矩形底扁壳结构 .....	225
7.2	圆形底扁壳结构 .....	235
7.3	非线性球形扁壳的精确解法 .....	241
7.4	非线性变壁厚圆柱壳屋盖 .....	249
7.5	扁壳结构塑性极限分析 .....	253
7.6	双曲抛物壳的塑性极限分析 .....	257
7.7	膜结构及其塑性失稳 .....	263
<b>第八章</b>	<b>空间网壳结构 .....</b>	<b>270</b>
8.1	一般柱壳结构的力学分析 .....	270
8.2	网壳结构的比拟方法 .....	274
<b>附录</b>	<b>非线性空间结构分析的数学方法 .....</b>	<b>280</b>
	一、偏微分方程的差分法 .....	280

二、傅里叶级数及展开式 .....	285
三、Euler 方程的特征值解 .....	290
四、非线性微分方程的线性化 .....	294
<b>参考文献</b> .....	302

# 第一章 非线性悬索结构

## 1.1 单索的一般方程

设有如图 1.1 所示的单索微段,微段水平长  $dx$ ,受荷载  $q(x)$  作用。由静力平衡条件可以列出悬索的平衡方程:

由  $\sum x = 0$ , 有

$$\frac{d}{dx}(N \cos \theta) = 0 \quad (1.1)$$

由  $\sum y = 0$ , 有

$$\frac{d}{dx}(N \sin \theta) dx + q(x) dx = 0 \quad (1.2)$$

引入悬索的水平张力  $H$ , 它与悬索的张力  $N$  之间有  $N \cos \theta = H$ 。由式(1.1)可知

$$N \cos \theta = H = \text{const}(\text{常数})$$

将  $N = H / \cos \theta$  代入式(1.2)中可得

$$H \frac{d}{dx}(\tan \theta) = -q(x) \quad (1.3)$$

如果设索的竖向位移为  $w$ , 则  $\tan \theta = \frac{dw}{dx}$ , 代入式(1.3)中, 可得

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x) \quad (1.4)$$

式(1.4)即为悬索的基本平衡方程式。

在式(1.4)中, 悬索张力  $N$  的水平分量  $H$  尽管是常数, 但目前是未知的; 悬索竖向挠度  $w$  也是未知的, 因此式(1.4)属超静定方程。当  $H$  可以确定时, 式(1.4)就成为关于  $w$  的二阶常微分方程, 结合边界条件可以确定出  $w$  的形式, 并进而获得悬索的新的变形位置。因此有必要再研究悬索的变形及其协调方程。

悬索变形协调方程的物理意义是: 在初始状态时, 外荷载为  $q_0(x)$ , 索中张力的水平分量为  $H_0$ , 对应的索张力为  $N_0$ , 由垂直挠度  $w_0(x)$  产生的索长为  $S_0$ ; 而在荷载为  $q(x)$  的某一瞬时, 以上各量变成  $H$ 、 $N$ 、 $S$ , 则索的增长为

$$\Delta S = S - S_0 \quad (1.5)$$

各  $x$  点处的索张力增加为

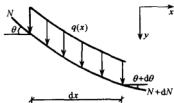


图 1.1 单索微段

$$\Delta N = N(x) - N_0(x) \quad (1.6)$$

从物理意义来看, 索长度的增长  $\Delta S$  是由于荷载增加导致索中各点张力  $\Delta N$  增加, 因而可以导出其间的关系式。设索在弹性变形阶段的弹性模量为  $E$ , 横截面为  $A$ , 则  $\Delta N(x)$  产生的伸长为

$$d\Delta S = \frac{dS_0}{EA} \Delta N(x) = \frac{1}{EA} [N(x) - N_0(x)] dS_0 \quad (1.7)$$

则索的伸长与张力之间有关系式

$$\Delta S = \int d\Delta S = \frac{1}{EA} \int [N(x) - N_0(x)] dS_0 \quad (1.8)$$

式(1.8)即为索变形的协调方程。

与索的变形有关的是索的几何方程。索的挠度用  $w(x)$  表示时, 索长度  $S$  与  $w$  之间的关系式为

1) 悬索的两支点在相同高度上时,

$$dS = \sqrt{dx^2 + dw^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \quad (1.9)$$

2) 悬索的两支点相差高度为  $C$  时,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{C}{l}\right)^2} dx \quad (1.10)$$

式中,  $l$  为悬索两端点之间的水平距离。

以上两式还有另外的表达方法, 即将悬索看作两端铰支的简支梁, 引入相应的梁的弯矩  $M$  及剪力  $V$ , 则由图 1.2 可知,  $x$  段左隔离体在  $C=0$  时,

$$M = R_A x + \left[ - \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \right] = Hw(x) \quad (1.11)$$

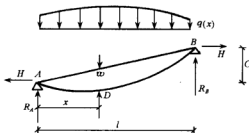


图 1.2 支点不同高的单索

式中,  $R_A$  为  $A$  点支反力; 类似地,  $B$  点支反力为  $R_B$ 。由式(1.11)可以得

$$w(x) = \frac{M(x)}{H} \quad (1.12)$$

即将悬索  $AB$  视为简支梁时弯矩  $M(x)$  与挠度  $w(x)$  成比例。

当  $C \neq 0$  时, 依据  $\sum M_A = 0$ , 有

$$\int_0^l xq(x)dx + HC - R_B l = 0$$

求得

$$R_B = \frac{1}{l} \int_0^l xq(x)dx + \frac{HC}{l} \quad (1.13)$$

将悬索  $AB$  看作简支梁时, 荷载  $q(x)$  在支点产生的支反力用  $R'_A, R'_B$  表示, 即有悬索支反力

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R'_A - \frac{HC}{l} \\ R_B &= R'_B + \frac{HC}{l} \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R'_A &= \frac{1}{l} \int_0^l q(x)(l-x)dx \\ R'_B &= \frac{1}{l} \int_0^l xq(x)dx \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

图 1.2 中, 在  $C \neq 0$  时依然截取  $x$  段左隔离体, 取  $\sum M_D = 0$ , 则有

$$R_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi + H\left[\frac{HC}{l} - w(x)\right] = 0 \quad (1.16)$$

通过运算, 简化为

$$Hw(x) = R_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi \quad (1.17)$$

如此求得  $D$  点的挠度为

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{M(x)}{H} \\ M(x) &= R_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi \end{aligned} \quad (1.18)$$

按梁理论中剪力  $V(x)$  与弯矩  $M(x)$  之间关系

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

可引入悬索变形协调方程的另一表达式, 即将梁理论中的剪力  $V$  代入式(1.9)和式(1.10)中, 分别得出索长公式:

1) 在悬索两支点有相同高度时,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2} dx \end{aligned} \quad (1.19)$$

2) 在悬索两支点相差高度  $C$  时,

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + \left( \frac{V}{H} + \frac{C}{l} \right)^2} dx \quad (1.20)$$

对于小挠度索,即悬索近于水平状,由于  $H = N \cos \theta$ , 在  $\cos \theta \approx 1$  时,则  $N$  与  $H$  近似,可认为  $N$  亦为常数。这时由于

$$\frac{dw}{dx} = \frac{V}{H} = 0$$

将式(1.19)被积函数展开,略去高阶导数项,得索长近似公式为

$$S \approx l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \quad (1.21)$$

类似地,式(1.20)改为

$$S \approx \left( 1 + \frac{C^2}{2l^2} \right) l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \quad (1.22)$$

现考察竖向荷载  $q(x)$  为常数时悬索的变形情况。在索两端高差为  $C$  时,将  $w$  改为  $z$ , 由式(1.4)有

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q}{H}$$

积分两次后,得

$$z = -\frac{q}{2H} x^2 + C_1 x + C_2$$

显然这是抛物线表达式。积分常数由边界条件确定,即

$$\begin{aligned} x=0 & \quad z=0 \\ x=l & \quad z=C \end{aligned}$$

从而解出

$$z = \frac{q}{2H} x(l-x) + \frac{C}{l} x$$

在此抛物线方程中,索张力的水平分量  $H$  是未知的,所以此方程代表一族抛物线。因为通过  $A, B$  两点可以有不同长度的索,它们在均布荷载作用下形成一族不同垂度的抛物线,具有不同  $H$  值。由补充条件确定出  $H$  值后,抛物线形状可以惟一确定。例如曲线在跨中垂度为  $f$ , 那么索内张力为

$$H = \frac{ql^2}{8f}$$

相应的挠度  $z$  为

$$z = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + \frac{C}{l} x$$

按索长公式可以求出  $S$  为

$$S = l \left( 1 + \frac{C^2}{2l^2} + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

在两端支座等高时,  $S$  为



$$S = l \left( 1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

在分析和求解悬索问题时,应将变形协调方程具体化,表达成悬索几何尺寸及内力的相关形式。由于悬索材料的延伸率不大,所以初始荷载下各变量下标加零表示,其中  $S_0$  及加载下的  $S$  亦相差不大,可表达成

$$N_0(x) = H_0 \sec \theta = H_0 \frac{dS_0}{dx}$$

$$N(x) = H \frac{dS}{dx} \approx H \frac{dS_0}{dx}$$

那么

$$\begin{aligned} \int_0^l [N(x) - N_0(x)] dS_0 &\approx \int_0^l (H - H_0) \frac{dS_0}{dx} dS_0 \\ &= \int_0^l (H - H_0) \left( \frac{dS_0}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (1.23)$$

根据  $\frac{dS_0}{dx} = \sqrt{1 + \left( \frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2}$ , 式(1.8)可以改写为

$$S - S_0 = \frac{1}{EA} \int_0^l (H - H_0) \left[ 1 + \left( \frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2 \right] dx \quad (1.24)$$

小挠度情况下,可以进一步简化式(1.24)。因在小挠度时,  $w(x) = \frac{M(x)}{H}$ ,

$\frac{dw}{dx} = \frac{V}{H}$  值都很小,实用中一般  $\frac{C}{l}$  也很小,而且有近似式

$$\begin{aligned} N_0(x) &\approx H_0 & N(x) &\approx H \\ l_0 &\approx l & l_0 &\approx S_0 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{EA} \int [N(x) - N_0(x)] dS_0 &\approx \frac{1}{EA} (H - H_0) S_0 \\ &= \frac{H - H_0}{EA} l_0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

将关系式

$$\begin{aligned} S &\approx \left( 1 + \frac{C^2}{2l^2} \right) l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \\ S_0 &\approx \left( 1 + \frac{C_0^2}{2l_0^2} \right) l_0 + \frac{1}{2H_0^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx \end{aligned}$$

与式(1.25)结合,可以得出变形协调式为

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx - \frac{1}{2H_0^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx = \frac{H - H_0}{EA} l_0 \quad (1.26)$$

式(1.26)在积分之后,化为  $H$  的三次代数方程,一般用迭代法等数值方法求解  $H$  值。

悬索问题可归结为求式(1.4)的平衡方程与式(1.26)的变形协调方程。由于式(1.26)通常用数值方法求解,故悬索问题一般用迭代法等求解。这里以承受均布荷载的抛物线悬索为例,说明它的解法。

设在初始状态荷载  $q_0$  作用下,索中有水平张力  $H_0$ ,抛物线索跨中垂度  $f_0$  已确定,即有

$$f_0 = \frac{q_0 l^2}{8H_0}$$

在某一瞬时  $q$  荷载作用下,抛物线方程为

$$z = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + \frac{C}{l}x$$

由剪力公式求出

$$V_0 = \frac{q_0}{2}(l-2x)$$

$$V = \frac{q}{2}(l-2x)$$

将以上两式代入式(1.26),可求出  $C$  值不变时的  $H$  为

$$H = H_0 + \frac{EA l^2}{24} \left( \frac{q^2}{H^2} - \frac{q_0^2}{H_0^2} \right)$$

用直接推导  $H$  的方法,也能获得上式。即在均布荷载下,初始状态和终态下索曲线长度分别为

$$S_0 = l \left( 1 + \frac{C_0^2}{2l^2} + \frac{8f_0^2}{3l^2} \right)$$

$$S = l \left( 1 + \frac{C^2}{2l^2} + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

索之伸长量在  $C$  值不变时为

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{8}{3} \times \frac{f^2 - f_0^2}{l^2}$$

于是索的变形协调方程为

$$\frac{H - H_0}{EA} l = \frac{8}{3} \times \frac{f^2 - f_0^2}{l}$$

而由梁的理论及平衡方程可得出

$$f = \frac{ql^2}{8H}$$

最后整理出

$$H - H_0 = \frac{EA l^2}{24} \left( \frac{q^2}{H^2} - \frac{q_0^2}{H_0^2} \right)$$

**算例 1.1** 两端等高承受均布荷载的抛物线索,截面积  $A = 67.4 \text{ mm}^2$ ,  $E = 180 \text{ kN/mm}^2$ ,  $l = l_0 = 8 \text{ m}$ ,  $H_0 = 10 \text{ kN}$ ,  $q_0 = 0.2 \text{ kN/m}$ ,  $q = 0.5 \text{ kN/m}$ 。求初始状态时

最大垂度  $f_0$ ，以及最后状态时水平张力  $H$ 、最大垂度  $f$ 。

解 根据荷载情况可知，初始状态时，

$$M_0(x) = \frac{q_0 x}{2}(l - x) = 0.1x(8 - x)$$

$$f_0 = \frac{M\left(\frac{l}{2}\right)}{H_0} = 0.16\text{m}$$

由  $M_0(x)$  微分得

$$V_0(x) = 0.8 - 0.2x$$

$$\int_0^l V_0^2 dx = 1.707\text{kN}^2 \cdot \text{m}$$

在最后状态，

$$M(x) = \frac{qx}{2}(l - x) = 0.25x(l - x)$$

$$V(x) = 2 - 0.5x$$

$$\int_0^l V^2 dx = 10.667\text{kN}^2 \cdot \text{m}$$

将以上结果代入关于  $H$  的协调方程，得出  $H$  的三次代数方程为

$$H^3 + 2.94H^2 - 8088 = 0$$

可用迭代法解出索的水平张力  $H$  为

$$H = 19.14\text{kN}$$

而  $f$  为

$$f = \frac{M\left(\frac{l}{2}\right)}{H} = 0.209\text{m}$$

式(1.26)是求索中张力经常遇到的式子，除了以上提到的迭代法外，还可以用其他比较准确的数值方法求解。这里给出另一种近似解法。如果借用  $D$  和  $D_0$ ，分别表示为

$$D_0 = \int_0^{l_0} V_0^2 dx$$

$$D = \int_0^l V^2 dx$$

式(1.26)可改写为

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{D}{2H^2} - \frac{D_0}{2H_0^2} = \frac{H - H_0}{EA} l_0 \quad (1.27)$$

如果令  $H - H_0 = \Delta H$ ，那么式(1.27)可进一步写为

$$\Delta H = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^2} - \frac{D_0 EA}{2H_0^2 l_0} + \frac{DEA}{2(H_0 + \Delta H)^2 l_0}$$

在一般情况下， $\Delta H$  与  $H_0$  相比是很小的，因此上式右方可以略去  $\Delta H$ ，而求出  $\Delta H$

的一级近似式

$$\Delta H_1 = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^3} - \frac{D_0 EA}{2H_0^2 l_0} + \frac{DEA}{2H_0^3 l_0}$$

将这一级近似值代替式(1.27)中右方  $H - H_0$ , 可以得出  $\Delta H$  的二级近似值为

$$\Delta H_2 = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^3} - \frac{D_0 EA}{2H_0^2 l_0} + \frac{DEA}{2(H_0 + \Delta H_1)^2 l_0}$$

依次类推, 可以求得  $\Delta H$  至精确值。这种方法称为渐近法或逼近法。由精确值  $\Delta H$  可以求出精确值  $H$ 。

## 1.2 辐射式悬索结构

辐射式悬索结构是悬索结构中常用的形式, 一般由外环、内环及辐射索系组成, 如图 1.3 所示。本节讨论它在弹性范围内的内力及位移。

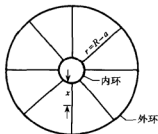


图 1.3 辐射式悬索结构

辐射式结构设计和计算中, 每根悬索的两个支承点都是一个在外环上, 一个在内环上。外环的支座是不能产生变位的, 内环的支座则可能产生位移。一般情况下, 加载后内环移到某一固定位置时, 即可决定各索在内环的位置, 从而可以决定所有索的内力。辐射式悬索结构的求解核心是内环的位移。

如果考虑内环重心 3 个线位移, 即垂直位移  $\Delta(z)$ 、水平位移  $h(x)$  和  $v(y)$ , 同时有 3 个角位移, 分别用  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  表示, 则辐射式悬索的内环共有 6 个独立的位移。如果以上 6 个位移已知, 则每索张力可以求得。当每索张力为已知时, 即可求得各索对内环在  $x, y$  和  $z$  轴的分力以及对内环 3 个轴的力矩。

这时可以列出求解 6 个位移的静力平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0 & \sum M_{xi} &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & \sum M_{yi} &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 & \sum M_{zi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

式中,  $X_i, Y_i, Z_i, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}$  都可表为  $\Delta, h, v, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  的函数。

一般地,  $\alpha_z$  是高阶小量, 对索中张力影响可以略去, 位移能减少到 5 个。

当结构具有一个对称轴, 例如  $y$  轴时, 内环仅有 3 个位移  $\Delta, h, \alpha_y$ 。式(1.28)改为

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 \\ \sum M_{yi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

在辐射式悬索结构中,最常见的是结构与荷载都关于  $z$  轴为轴对称的情形,即关于垂直位移的几何中心轴为轴对称的情形,下面着重对此进行分析。

设内环圆半径为  $a$ ,外环圆半径为  $R$ ,每索平面长度为  $r$ ,并有  $r=R-a$ 。考虑到轴对称情况,每根索的应力和变形都是相同的,故计算时只须考虑一根索就可以了。如果内外环高差在加载前为  $C$ ,加载后外环固定,内环下移为  $\Delta$ ,则新的内外环高差为  $C_1=\Delta+C$ 。

设每根索的截面积为  $A$ ,分配于每索内环重度为  $g$ ,索上承受  $q_0(x, \theta)$  的面荷载,如果共有  $n$  根索作为承力构件,那么每根索单位长度承受的面荷载  $q(x)$  为

$$q(x) = \frac{2\pi(x+a)}{n} q_0(x, \theta) \quad (1.30)$$

沿每索  $dx$  段上的荷载为  $dq$ ,并有

$$dq = q(x)dx = \frac{2\pi(x+a)}{n} q_0(x, \theta) dx \quad (1.31)$$

如将索看作简支梁,可以求得  $x$  处剪力为

$$V(x) = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx - \int_0^x q(x)dx \quad (1.32)$$

设初始状态外部荷载为零,即  $q_0(x)=0$ ,按简支梁分析索的支反力为零。由式(1.14)可求出悬索在内环支点的反力为

$$R = -\frac{H_0 C}{r} \quad (1.33)$$

式中,  $H_0$  为初始状态每根索的水平张力。根据悬索在内环竖向合力的平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} -\frac{H_0 C}{r} + g &= 0 \\ C &= \frac{gr}{H_0} \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

即当  $H_0$  为已知时,内环的位置  $C$  可从上述式得出,这时悬索呈直线形状。

当加荷  $q(x)$  之后,内环下移至  $C_1$ ,索的张力增加到  $H$ ,即  $H=H_0+\Delta H$ ,代入式(1.27)变形协调方程得

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + \frac{EA(C_1^2 - C_0^2)}{2r^2} + \frac{EA}{2H^2 r} \int_0^r V^2 dx \quad (1.35)$$

悬索在内环支座的反力为

$$R = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx - \frac{HC_1}{r} \quad (1.36)$$

再由内环竖向平衡条件得

$$R + g = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx + g - \frac{HC_1}{r} = 0 \quad (1.37)$$

由式(1.35)与式(1.37)可求两个未知数  $H$  和  $C_1$ 。

辐射式悬索结构的另一种形式是内环固定,外环可以自由位移,称为伞状悬索结构。它同样有结构和荷载的轴对称性,即仅考虑一根悬索。设初始状态时每根索水平张力为  $H_0$ ,外、内环高差为  $C$ ,  $g$  为外环分配给每一根索的重度,悬索在外环的反力为  $\frac{H_0 C}{r}$ ,由此推出

$$C = \frac{gr}{H_0}$$

在受荷  $q(x)$  状态时,外环位置下移到  $C_1$ ,索张力  $H$  表示为

$$H = H_0 + \frac{EA(C_1^2 - C^2)}{2r^2} + \frac{EA}{2H_0^2 r} \int_0^r V^2 dx \quad (1.38)$$

悬索在外环支座的反力为

$$R = \frac{1}{r} \int_0^r xq(x)dx - \frac{HC_1}{r} \quad (1.39)$$

竖向平衡方程则为

$$\frac{1}{r} \int_0^r xq(x)dx + g - \frac{HC_1}{r} = 0 \quad (1.40)$$

由式(1.38)和式(1.40)可求出  $H$  和  $C_1$  值。以上各式中,  $x$  是由内环量起的变量。

**算例 1.2** 有一单层悬索结构,内环半径  $a=5\text{m}$ ,外环半径  $R=25\text{m}$ ,整个结构由 180 根索组成,每索由 6 股  $\phi 12(7\phi 4)$  钢绞线组成,每索面积为  $5.28\text{cm}^2$ 。初始状态时,每索承受水平张力  $H_0=180\text{kN}$ ,内环重  $60\text{kN}$ ,索结构受面荷载  $q_0=1\text{kN/m}^2$ ,索的弹性模量  $E=180\text{kN/mm}^2$ 。求加载后的水平张力  $H$  和内环的垂直位移  $C_1$ 。

**解** 首先求初始状态时的  $C$ ,由于

$$g = \frac{60}{180} = 0.33\text{kN}$$

$$r = R - a = 20\text{m}$$

$$H_0 = 180\text{kN}$$

可以求出

$$C = \frac{gr}{H_0} = 0.037\text{m}$$

在最后状态时,

$$EA = 9.504 \times 10^4\text{kN}$$

承受  $q_0=1\text{kN/m}^2$  荷载,由前述公式(1.30)得

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{2\pi(x+a)}{n} q_0 \\ &= 0.1745 + 0.0349x \end{aligned}$$

积分式可求出

$$\frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx = 4.073\text{kN}$$

代入剪力公式得

$$V(x) = 4.073 - 0.1745x - 0.01745x^2$$

$$\int_0^r V^2 dx = 188.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

将已知各量代入式(1.35)得

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \frac{EA(C_1^2 - C_0^2)}{2r^2} + \frac{EA}{2H^2 r} \int_0^r V^2(x) dx \\ &= 179.84 + 118.8C_1^2 + \frac{447876}{H^2} \end{aligned}$$

再由式(1.37)求得

$$HC_1 = 88.12$$

联立求解以上两式,可以求出  $C_1$  和  $H$  值。利用迭代逼近方法,先假定  $H=H_0=180\text{kN}$ ,求得  $C_1$  的一级近似值为

$$C_1 = \frac{88.12}{180} = 0.49\text{m}$$

则可求出  $H$  的一级近似值为

$$H = 222.18\text{kN}$$

依次代入新的  $H$  再求  $C_1$ ,各级近似值为

$$\text{二级近似: } C_1 = 0.40\text{m} \quad H = 207.92\text{kN}$$

$$\text{三级近似: } C_1 = 0.42\text{m} \quad H = 211.15\text{kN}$$

$$\text{四级近似: } C_1 = 0.417\text{m} \quad H = 210.54\text{kN}$$

收敛值为  $H=210.69\text{kN}$ 。在不计荷载系数时,由  $\sigma = \frac{H}{A} = 396.4\text{N/mm}^2$  可选用冷拉Ⅲ级钢  $f_{py}=420\text{N/mm}^2 > 396.4\text{N/mm}^2$ 。

另一种悬索结构形式为双层辐射式结构,如图 1.4 所示。这种悬索结构由内、外环及内、外环联系的上、下两层辐射式悬索组成。它受载后竖向位移小,有很好的稳定性和刚度。上层索为承重索,下层索为稳定索。这里仅限于研究轴对称双层悬索结构。

设结构中外环半径为  $R$ ,内环半径为  $a$ ,索长为  $r=R-a$ 。整个层面有  $n_1$  根上

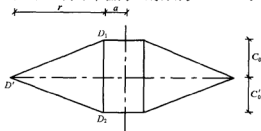


图 1.4 双层辐射式悬索

索,  $n_2$  根下索, 每上索面积为  $A_1$ , 每下索面积为  $A_2$ ; 另设内环上索支座高度与外环高度差为  $C_0$ , 内环下索与外环高差为  $C'_0$ , 按轴对称考虑。内外环面积之间有

$$A_2 = \frac{n_2}{n_1} A_1 \quad (1.41)$$

在初始状态时, 上索承受的水平张力为  $H_0$ , 而下索承受的水平张力为  $H'_0$ 。

按前所述, 上索内环的垂直反力为  $\frac{H_0 C_0}{r}$ , 下索内环的垂直反力为  $-\frac{H'_0 C'_0}{r}$ 。假设相应于一根上索及其相应部分下索的部分内环重为  $g$  (包括一半相应上、下索重), 根据平衡条件得

$$\frac{H_0 C_0}{r} - \frac{H'_0 C'_0}{r} + g = 0 \quad (1.42)$$

在单位面积荷载  $q_0(x)$  作用下, 每根上索单位水平长度的荷载  $q(x)$  为

$$q(x) = \frac{2\pi}{n_1} (x+a) q_0(x) \quad (1.43)$$

将上索看作支承在  $D_1$  和  $D'$  的简支梁, 则上索在  $D_1$  支座的反力为

$$\begin{aligned} R'_{D_1} &= \frac{1}{r} \int_0^r (r-x) q(x) dx \\ &= \frac{2\pi}{n_1 r} \int_0^r (r-x)(x+a) q_0(x) dx \end{aligned}$$

在上索  $x$  处的剪力为

$$\begin{aligned} V(x) &= R'_{D_1} - \int_0^x q(x) dx \\ &= \frac{2\pi}{n_1 r} \int_0^r (r-x)(x+a) q_0(x) dx \\ &\quad - \frac{2\pi}{n_1} \int_0^x (x+a) q_0(x) dx \end{aligned} \quad (1.44)$$

如果  $q_0(x)$  为一常数  $q_0$ , 则有

$$\begin{aligned} R'_{D_1} &= \frac{2\pi q_0}{n_1} \left( \frac{ar}{2} + \frac{r^2}{6} \right) \\ V(x) &= \frac{\pi q_0}{n_1} \left( ar + \frac{r^2}{3} - 2ax - x^2 \right) \end{aligned}$$

如果内环的垂直变位为  $\Delta$ , 则变形协调方程对上索有

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + \frac{EA_1[(C_0 - \Delta)^2 - C_0^2]}{2r^2} + \frac{EA_1}{2H^2 r} \int_0^r V^2 dx \quad (1.45)$$

按式(1.14)得上索在内环支座  $D_1$  处的垂直反力为

$$R_{D_1} = R'_{D_1} + \frac{H(C_0 - \Delta)}{r} \quad (1.46)$$

下索是不直接承受竖向荷载的, 所以在初始状态或加载以后, 下索总是呈直线形状。前已假定在初始状态时, 下索的内环支点  $D_2$  与外环支座高差为  $C_0$ , 索的水



平张力为  $H'_0$ 。当加载后,内环向下的竖向位移为  $\Delta$ ,这时内环支座与外环支座高差改为

$$C_1 = C'_0 + \Delta$$

下索的水平张力  $H'$  为

$$\begin{aligned} H' &= H'_0 + \Delta H' = H'_0 + \frac{EA_2[(C'_0 + \Delta)^2 - C'^2_0]}{2r^2} \\ &= \frac{EA_2[2C'_0\Delta + \Delta^2]}{2r^2} \end{aligned} \quad (1.47)$$

代入式(1.14)后得下索内环上竖向反力为

$$\begin{aligned} R_{D_2} &= -\frac{H'C_1}{r} = -\frac{EA_2}{2r^3}\Delta^3 - \frac{3EA_2C'_0}{2r^3}\Delta^2 \\ &\quad - \left( \frac{EA_2C'^2_0}{r^3} + \frac{H'_0}{r} \right) \Delta - \frac{H'_0C'_0}{r} \end{aligned} \quad (1.48)$$

由内环的平衡条件

$$R_{D_1} + R_{D_2} + g = 0$$

求得平衡方程为

$$\begin{aligned} \Delta^3 + 3C'_0\Delta^2 + (2C'^2_0 + \frac{2r^2H'_0}{EA_2} + \frac{2r^2H}{EA_2})\Delta \\ - \frac{2r^2}{EA_2} \left[ \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx + g + \frac{HC_0}{r} - \frac{H'_0C'_0}{r} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

联立式(1.45)和(1.49),可以求出两个未知数  $H$  和  $\Delta$  之值。

双层辐射式悬索结构的算例可参阅 1.4 节,那里给出了硬化材料的算例,如果令  $E=E_1$ ,即是弹性结果。

### 1.3 非线性悬索结构的方程

悬索无论是用较大延性的软钢经冷拉处理,还是用强度较高的钢绞线等材料制作,材料的单向拉伸曲线都表现出明显的弹塑性,应力-应变曲线是非线性的。

在弹塑性理论中,材料的  $\sigma$ - $\epsilon$  拉伸曲线全过程可以简化描述成图 1.5 中的两种曲线。对于有明显强化效应的材料,如图中①所示,其物理关系式为

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & (\epsilon \leq \epsilon_s) \\ \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s) & (\epsilon > \epsilon_s) \end{cases} \quad (1.50)$$

另一种是有较高强度的材料,它的  $\sigma$ - $\epsilon$  拉伸曲线,没有明显的屈服台阶,如图 1.5 中②所示,其物理关系式为

$$\sigma = A\epsilon^n \quad (1.51)$$

式中,  $A$  是常数;  $n$  取 0~1.0 之间的某值。

前一种拉伸曲线称为线性强化曲线,它表明材料在初始变形时处于弹性阶段,

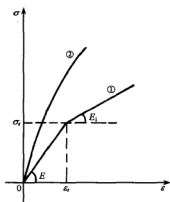


图 1.5 非线性  $\sigma$ - $\epsilon$  图

材有明显的强化效应,或高强度绞线等不表明明显弹塑性的悬索材料,结构塑性设计会更为合理。

图 1.5 的单向拉伸非线性物理曲线可以推广到更普遍的二维或三维受力情况。这时引入应力强度  $\sigma_i$  和应变强度  $\epsilon_i$ , 分别表示为

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.52)$$

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.53)$$

苏联学者伊留申曾做过证明,即在简单加载条件下,某一瞬时的应变强度与应力强度之间存在函数关系,即  $\sigma_i = \phi(\epsilon_i)$ ,而这一公式的具体表达将按单一曲线假设由材料单向受力状态的特征给出。即图 1.5 中的曲线既是单向拉伸  $\sigma$ - $\epsilon$  图,又是复杂状态下该材料的  $\sigma_i$ - $\epsilon_i$  图,其中的  $\sigma_i$ 、 $\epsilon_i$  对某种材料来说则为一定的常数。

在复杂应力状态下,  $\sigma_s$  为屈服曲面。在  $\sigma_i < \sigma_s$  时,材料处于弹性变形状态,其应力与应变满足广义胡克定律;而在  $\sigma_i > \sigma_s$  时,可认为材料处于强化状态,这时应力、应变间满足本构方程,与广义胡克定律不同。

如果用增量理论描述的话,则有本构方程

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{3\epsilon_i^p}{2\sigma_i} \dot{s}_{ij} \quad (1.54)$$

如果用全量理论描述的话,则有本构方程

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} + \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i} s_{ij} \quad (1.55)$$

式中,  $s_{ij}$ 、 $e_{ij}$  分别为应力和应变偏量,即

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \\ e_{ij} &= \epsilon_{ij} - \epsilon_m \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_m &= \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

由此可知,材料的应力强度达到和超过 $\sigma_s$ 时,材料表现较复杂的物理关系,其应力与变形的求解比弹性变形时难得多。但对于悬索结构要相对简单一些,因为悬索结构是单向受力状态的结构。

如果悬索是线性强化材料,并且应用了它的线性强化性能,则悬索的受力和变形将分成两个部分,即在悬索中 $\sigma < \sigma_s$ 时,悬索处于弹性状态,它的方程为

平衡方程:

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x)$$

变形协调方程:

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx - \frac{1}{2H^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx = \frac{H - H_0}{EA} l_0$$

以上各式中的变量及含义均同 1.1 节中所述。

当材料中的 $\sigma > \sigma_s$ ,即应变 $\epsilon > \epsilon_s$ 时,材料表现为强化特性,它的方程为

平衡方程:

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x)$$

这与弹性状态下的平衡方程相同,但变形协调方程则不同。

按单索变形, $\Delta S$  定义为

$$\Delta S = \int d\Delta S = \frac{1}{E_1 A} \int [N(x) - N_0(x)] dS - \frac{\sigma_s}{E_1} l_0 + \epsilon_s l_0 \quad (1.58)$$

式中, $N(x)$ 为索中 $x$ 点处的张力,并有

$$\int [N(x) - N_0(x)] dS = \int_0^l (H - H_0) \left[ 1 + \left( \frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2 \right] dx$$

按悬索理论中常用的近似关系, $N_0(x) \approx H_0$ ,  $N(x) \approx H$ ,  $l \approx l_0$ ,  $S \approx l_0$ ,则有变形协调方程

$$\begin{aligned} & \int_0^l \sqrt{1 + \left( \frac{V}{H} + \frac{C}{l} \right)^2} dx - \int_0^{l_0} \sqrt{1 + \left( \frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2} dx \\ &= \frac{1}{E_1 A} \int_0^{l_0} (H - H_0) \left[ 1 + \left( \frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

经整理得出,新的变形协调方程是关于 $H$ 的三次方程,为

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx - \frac{1}{2H^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx + \frac{\sigma_s}{E_1} = \frac{H - H_0}{E_1 A} l_0 + \epsilon_s l_0 \quad (1.59)$$

综合平衡方程及新的变形协调方程式(1.59),才能求出悬索强化变形的张力。

根据式(1.59),可以进一步写出关于  $H$  的三次代数方程的显示。如令  $\int_0^{l_0} V_0^2 dx = D_0$ ,  $\int_0^l V^2 dx = D$ , 则有

$$H^3 + \left[ \frac{D_0 E_1 A}{2 H_0^2 l_0} - \frac{(C^2 - C_0^2) E_1 A}{2 l_0^2} - H_0 + \epsilon_s E_1 A - \sigma_s A \right] H^2 - \frac{D E_1 A}{2 l_0} = 0 \quad (1.60)$$

一般在基准态时,  $D_0=0$ , 并由  $H-H_0=\Delta H$ , 式(1.60)还可导出关于  $\Delta H$  的表达式

$$\Delta H = \frac{E_1 A (C^2 - C_0^2)}{2 l_0^2} + \frac{D E_1 A}{2 (H + \Delta H)^2 l_0} - \epsilon_s E_1 A + \sigma_s A \quad (1.61)$$

应用式(1.61)能方便地用迭代方法计算  $H$  值。

#### 1.4 辐射式双层悬索结构的塑性计算<sup>1)</sup>

这里以图 1.4 所示的双层悬索结构为例,讨论荷载加大到索材料表现线性塑性强化阶段时的内力 and 位移。

由于结构是轴对称的,索的截面积相同,因而结构处于强化状态时各索的表现一致。同样可以以一根索的方程描述之。

在荷载作用不大,即表现为弹性变形时,该结构的内力及位移的求解方程在 1.2 节中已有介绍,下面讨论它的强化变形阶段。

此阶段的上索面积为  $A_1$ ,变形后内环位移  $C=C_0-\Delta$ ,代入变形协调方程式(1.61),求出强化阶段  $H$  为

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \Delta H \\ &= H_0 + \frac{E_1 A_1 [(C_0 - \Delta)^2 - C_0^2]}{2 r^2} \\ &\quad + \frac{D E_1 A_1}{2 (H + \Delta H)^2 r} - \epsilon_s E_1 A_1 + \sigma_s A_1 \end{aligned} \quad (1.62)$$

式中的  $D$  如同 1.3 节中所述。

设下索面积为  $A_2$ ,代入变形协调方程式(1.61),求出强化阶段  $H'$  为

$$\begin{aligned} H' &= H_0 + \Delta H' \\ &= H_0 + \frac{E_1 A_2 [(C_0 + \Delta)^2 - C_0^2]}{2 r^2} - \epsilon_s E_1 A_2 + \sigma_s A_2 \end{aligned} \quad (1.63)$$

式(1.63)反映了下索是非承重索即  $D=0$  的结果。

类似于弹性状态下双层悬索结构的分析,分别写出上、下索内环处的垂直反

1) 贾乃文,刘逸平,线性强化材料双层悬索结构计算. 特种结构,1996年4期

力为

$$R_{D_1} = R'_{D_1} + \frac{H(C_0 - \Delta)}{r}$$

$$R_{D_2} = -\frac{H'C_1}{r}$$

令  $g$  表示一根上索及相应下索部分的内环重, 根据平衡条件, 有

$$R_{D_1} + R_{D_2} + g = 0 \quad (1.64)$$

代入相关数值, 式(1.64)可写为

$$\begin{aligned} & -\frac{E_1 A_2}{2r^3} \Delta^3 - \frac{3E_1 C_0 A_2}{2r^3} \Delta^2 \\ & - \left( \frac{E_1 A_2 C_0^2}{r^3} + \frac{H'_0}{r} - \frac{\epsilon_1 E_1 A_2}{r} + \frac{\sigma_1 A_2}{r} + \frac{H}{r} \right) \Delta \\ & + \left( R'_{D_1} + g + \frac{HC_0}{r} - \frac{H'_0 C_0}{r} + \frac{\epsilon_1 E_1 C_0 A_2}{r} - \frac{\sigma_1 A_2 C_0}{r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

式中,  $R'_{D_1}$  为上索为简支梁时的内支座支反力, 其值为

$$R'_{D_1} = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx$$

与弹性阶段双层悬索结构对应方程式(1.49)相比, 式(1.65)增加了强化特征表述的  $\sigma_1, \epsilon_1$  等项。可以将式(1.65)进一步整理成由  $\Delta$  表述的多项式, 即

$$\begin{aligned} & \Delta^3 + 3C_0 \Delta^2 + \left( 2C_0^2 + \frac{2r^2 H'_0}{E_1 A_2} - 2\epsilon_1 r^2 + \frac{2\sigma_1 r^2}{E_1} + \frac{2Hr^2}{E_1 A_2} \right) \Delta \\ & - \frac{2r^3}{E_1 A_2} \left( R'_{D_1} + g + \frac{C_0}{r} H - \frac{H'_0 C_0}{r} \right) \\ & - 2\epsilon_1 C_0 r^2 + \frac{2r^2 C_0}{E_1} \sigma_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.66)$$

式(1.62)与式(1.66)即是求解线性强化阶段双层辐射式悬索结构的基本方程, 从中可以解出  $H$  即索的水平张力以及  $\Delta$  即内环位移。如令式(1.66)中  $\sigma_1 = \epsilon_1 = 0$ , 并有  $E_1 = E$ , 则公式转化为弹性阶段双层悬索结构的公式, 同 1.2 节中的表达相同。这里给出的仍然是外环固定、内环产生位移情况下的双层悬索公式。

**算例 1.3** 设一双层圆形辐射式悬索结构, 内环半径  $a = 1.8\text{m}$ , 外环半径  $R = 8\text{m}$ 。上、下层各 90 根索, 每索截面积为  $64.5\text{mm}^2$ , 设内环重  $12\text{kN}$ 。初始状态时,  $C_0 = 0.7\text{m}$ ,  $C'_0 = 0.9\text{m}$ , 如取  $E = 17 \times 10^4 \text{N/mm}^2$ ,  $H_0 = 25\text{kN}$ ,  $E_1 = 1 \times 10^5 \text{N/mm}$ , 材料  $\sigma_1 = 1800 \text{N/mm}^2$ , 计算强化阶段上、下索的张力  $H, H'$  和内环竖向位移  $\Delta$  (几何尺寸同图 1.4)。

**解** 由弹性极限应力-应变关系

$$\sigma_1 = E\epsilon_1$$

可求得屈服极限时,  $\epsilon_1 = 0.0106$ 。上索的伸长为

$$\Delta S = \epsilon_s S_0 = \epsilon_s \sqrt{6.2^2 + 0.7^2} = 0.06614\text{m}$$

前已证明, 均布荷载作用下, 索的变形曲线为抛物线。如令  $f$  表示抛物线跨中最大挠度, 并且令初始状态下  $f_0 = 0$ , 则有

$$\Delta S = \frac{8f^2}{3l}$$

由此解出

$$f = 0.3921\text{m}$$

另外, 由索的几何方程

$$f = \frac{ql^2}{8H}$$

以及

$$H = \sigma_s A$$

可以求出屈服时荷载  $q_s$  为

$$q_s = 9.475\text{kN/m}^2$$

这说明对此双层悬索结构, 只有在外荷载大于  $9.475\text{kN/m}^2$  时, 悬索才能进入强化阶段。如果取  $q_0 = 10\text{kN/m}^2$ , 按此算例中数据, 有

$$E_1 A_1 = E_2 A_2 = 6450\text{kN}$$

$$R_{D_1} = \frac{\pi q_0}{n_1} \left( ar + \frac{r^2}{3} \right) = 8.368\text{kN}$$

$$D = \left( \frac{\pi q_0}{n_1} \right)^2 \left( \frac{1}{3} a^2 r^3 + \frac{1}{3} ar^4 + \frac{4}{45} r^5 \right) = 238.615$$

根据公式求出  $H_0$

$$\frac{H_0 C_0}{r} - \frac{H_0' C_0'}{r} + g = 0$$

求出

$$H_0 = 20.36\text{kN}$$

将以上各数代入关于强化阶段的  $H$  和  $\Delta$  的方程, 即

$$H = 70.806 - 117.46\Delta + 83.897\Delta^2 + \frac{124118}{H^2} \quad (\text{a})$$

$$\Delta^3 + 2.7\Delta^2 + (2.4328 + 0.01192H)\Delta - 0.008344H + 0.1030 = 0 \quad (\text{b})$$

下面用迭代法求解以上两式。假定  $H$  的一级近似值为

$$H_1 = H_s = 116.1\text{kN}$$

代入上面(b)式中得

$$\Delta^3 + 2.7\Delta^2 + 3.8167\Delta - 0.8657 = 0$$

求出  $\Delta_1$  为

$$\Delta_1 = 0.197\text{m}$$

将一级近似  $H_1$ 、 $\Delta_1$  代回有关公式求得

$$H'_1 = 60.13\text{kN}$$

取  $H'_1$  与  $H_1$  的平均值为二级近似值,有

$$H_2 = 88.115\text{kN}$$

$$\Delta_2 = 0.1604\text{m}$$

三级近似值为

$$H_3 = 79.11\text{kN}$$

$$\Delta_3 = 0.1468\text{m}$$

依次求出收敛值为

$$H = 76.79\text{kN}$$

$$\Delta = 0.1433\text{m}$$

相应的下索张力

$$H' = H'_0 + \frac{E_1 A_2 (2C'_0 \Delta + \Delta^2)}{2r^2} - \epsilon_1 E_1 A + \sigma_1 A_2 = 91.53\text{kN}$$

将以上结果与弹性范围计算结果相比。在弹性范围内,上索张力  $H = 26.93\text{kN}$ ,承担的荷载  $q_0$  仅为  $1.75\text{kN/m}^2$ 。显然利用材料的强化特性会大大提高悬索结构的承载力,当  $q_0 = 10\text{kN/m}^2$  时,索中的水平张力  $H = 76.79\text{kN}$ 。

非线性单层辐射式悬索结构及其他类型的悬索结构等都可以参照本节方法推求其内力与变形。

## 1.5 非线性悬索的变分原理<sup>1)</sup>

类似于处理  $z=f(x)$  的极值问题,变分是处理泛函极值问题。

如果对于变量  $x$  的某一区域中的每一  $x$  值,有一个  $z$  值与之对应,我们称  $z$  是变量  $x$  的函数,即  $z=f(x)$ 。如果对于某一类函数  $\{z(x)\}$  中每一函数  $z(x)$ ,有一  $\pi$  值与之对应,我们称变量  $\pi$  为函数  $z(x)$  的泛函,写为  $\pi=\pi\{z(x)\}$ 。

泛函  $\pi\{z(x)\}$  的宗量  $z(x)$  的增量很小时称为变分,用  $\delta z(x)$  或  $\delta z$  表示。 $\delta z(x)$  是指  $z(x)$  和与它相接近的  $z_1(x)$  之差,表示为  $\delta z(x)=z(x)-z_1(x)$ 。当然, $\delta z(x)$  也是  $x$  的函数,而  $z(x)$  在接近  $z_1(x)$  的一类函数中是可任意改变的。

如果泛函  $\pi\{z(x)\}$  在任意一条与  $z=z_0(x)$  接近的曲线上的值不大于(或不小于)  $\pi\{z_0(x)\}$ ,也就是  $\delta\pi=\pi\{\delta z(x)\}-\pi\{z_0(x)\}\leq 0$ (或  $\geq 0$ ),则称泛函  $\pi\{z(x)\}$  在曲线  $z=z_0(x)$  上达到极大值(极小值),而且在  $z=z_0(x)$  上有

$$\delta\pi = 0 \quad (1.67)$$

求长度已知的均匀悬索的悬线形状是一个古老而著名的变分命题。

如图 1.6 所示,悬索的形状是由悬线达到最低势能的要求来决定的,而悬线的

1) 贾乃文,张润民. 弹塑性索网结构的最小势能原理. 空间结构,1999 年 1 期

势能由悬线的重心决定。

设悬线各点的纵坐标为  $z(x)$ ，并通过  $A(0, z_0)$  和  $B(x_1, z_1)$  两点，悬索长度为

$$l = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \quad (1.68)$$

$$z_c = \frac{1}{l} \int_0^l z dS = \frac{1}{l} \int_0^{x_1} z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \quad (1.69)$$

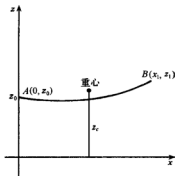


图 1.6 悬索形状命题

这个变分命题是：对通过  $z(0)=z_0, z(x_1)=z_1$  两点，并满足式(1.68)的一切曲线  $z=z(x)$ ，求使  $z_c$  为极小的函数  $z=z(x)$ 。

关于一般的变分运算及弹性力学变分原理，本节不做表述，请读者参阅有关书籍。这里主要讨论非线性悬索的变分原理。

索的原始水平张力为  $H_0$ ，受荷后水平张力变成  $H$ ，水平张力增量

$$\Delta H = H - H_0 \quad (1.70)$$

$H, H_0$  沿整个索的各点不变。各点的轴向力增量为

$$\begin{aligned} \Delta N &= H \sec \theta - H_0 \sec \theta_0 \\ &= (H - H_0) \sec \theta_0 + H (\sec \theta - \sec \theta_0) \end{aligned} \quad (1.71)$$

式中， $\theta_0$  是原索段  $dS_0$  方向与  $x$  轴的夹角， $\theta$  是加荷后相应的  $dS$  段与  $x$  轴的夹角。加载后  $H-H_0$  与  $H$  是同量级，在小挠度变形条件下， $\sec \theta - \sec \theta_0$  与  $\sec \theta_0$  相比是高阶小量，故式(1.71)的右边第二项可以略去，得

$$\Delta N = N - N_0 = (H - H_0) \sec \theta_0 \quad (1.72)$$

考虑加载前后索长的变化。在原始状态的  $dS_0$  时，其端点是  $x_0$  和  $x_0 + dx_0$ ；加载后端点  $x_0$  与  $x_0 + dx_0$  不仅有垂直变位，而且有水平变位。 $x_0$  点的水平变位为  $u$ ， $x_0 + dx_0$  段的水平变位是  $u + \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0$ ，加载后  $dS$  段的水平伸长是以上两式的差，即为

$$\left( u + \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 \right) - u = \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0$$

这个水平伸长所引起的索段  $dS_0$  的伸长应当等于上式在  $dS_0$  方向的投影长度，即为

$$\cos \theta_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 \quad (1.73)$$

由于  $dS_0$  段两端垂直变位所引起的伸长是

$$\sec \theta dx_0 - \sec \theta_0 dx_0 = (\sec \theta - \sec \theta_0) dx_0 \quad (1.74)$$

加载后  $dS_0$  段的总伸长是以上式(1.73)与式(1.74)两项之和，即



$$\Delta dS_0 = \cos\theta_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 + (\sec\theta - \sec\theta_0) dx_0 \quad (1.75)$$

如果索材料是带有强化特性的弹塑性材料,其强化阶段的应力-应变关系为

$$\sigma = \sigma_i + E_1(\epsilon - \epsilon_i)$$

在强化变形时,由轴力  $N_0$  增至  $N$  时,  $dS_0$  段的总伸长应当等于

$$\Delta dS = (N - N_0) \frac{dS_0}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} dS_0 + \epsilon_i dS_0 \quad (1.76)$$

它比弹性材料的表达式增加了等号右边的第二、三项。将式(1.76)简化成  $H$  表达式:

$$\Delta dS = \frac{1}{E_1 A} (H - H_0) \sec^2 \theta_0 dx_0 - \left( \frac{\sigma_i}{E_1} dx_0 - \epsilon_i dx_0 \right) \sec \theta_0 \quad (1.77)$$

比较式(1.76)与式(1.77),并令两式右边相等,可得出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_1 A} (H - H_0) \sec^2 \theta_0 - \frac{\sigma_i}{E_1} \sec \theta_0 + \epsilon_i \sec \theta_0 \\ &= \cos \theta_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} + (\sec \theta - \sec \theta_0) \end{aligned}$$

从上式解出  $\frac{\partial u}{\partial x_0}$  为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_0} &= \frac{1}{E_1 A} (H - H_0) \sec^3 \theta_0 - \frac{\sigma_i}{E_1} \sec^2 \theta_0 + \epsilon_i \sec^2 \theta_0 \\ &\quad - (\sec \theta - \sec \theta_0) \sec \theta_0 \end{aligned} \quad (1.78)$$

将上式对索长进行积分,得

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 &= (H - H_0) \int_0^l \frac{\sec^3 \theta_0}{E_1 A} dx_0 - \int_0^l \frac{\sigma_i}{E_1} \sec \theta_0 dx_0 \\ &\quad + \int_0^l \epsilon_i \sec \theta_0 dx_0 - \int_0^l (\sec \theta - \sec \theta_0) \sec \theta_0 dx_0 \\ &= u|_{(x_0=l)} - u|_{(x_0=0)} \end{aligned} \quad (1.79)$$

一般假定,在索的两端无水平位移,即有

$$u|_{(x_0=l)} = 0 \quad u|_{(x_0=0)} = 0$$

将边界条件代入式(1.79)中得

$$\begin{aligned} (H - H_0) \int_0^l \frac{\sec^3 \theta_0}{E_1 A} dx_0 - \int_0^l \frac{\sigma_i}{E_1} \sec \theta_0 dx_0 + \int_0^l \epsilon_i \sec \theta_0 dx_0 \\ = \int_0^l (\sec \theta - \sec \theta_0) \sec \theta_0 dx_0 \end{aligned} \quad (1.80)$$

式(1.80)表示了在线性强化条件下水平张力变化与索的垂直变位的关系,是本节推导出的线性强化索变分原理的协调方程。

以下求强化材料悬索的应变能  $U$ 。先考虑  $dS_0$  段索在加荷后所贮存的应变能

$$dU = \left[ \frac{N}{2} \left( \frac{N}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} + \epsilon_i \right) - \frac{N_0}{2} \left( \frac{N_0}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} + \epsilon_i \right) \right] dS_0 \quad (1.81)$$

$$= \left[ \frac{H}{2} \left( \frac{H \sec \theta_0}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} + \epsilon_i \right) - \frac{H_0}{2} \left( \frac{H_0 \sec \theta_0}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} + \epsilon_i \right) \right] \sec^2 \theta_0 dx_0 \quad (1.82)$$

将  $dU$  对整个索长从  $x_0=0$  到  $x=l$  积分, 可得全索的应变能为

$$U = \int_0^l \left[ \frac{H}{2} \left( \frac{H \sec \theta_0}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} + \epsilon_i \right) - \frac{H_0}{2} \left( \frac{H_0 \sec \theta_0}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} + \epsilon_i \right) \right] \sec^2 \theta_0 dx_0 \quad (1.83)$$

而外力功  $W$  为索挠度  $w$  的函数, 即

$$W = \int_0^l q(x_0)(w - w_0) dx_0 \quad (1.84)$$

则索的余能  $V$  为

$$V = W - U = \int_0^l q(x_0)(w - w_0) dx_0 - \int_0^l \left[ \frac{H}{2} \left( \frac{H \sec \theta_0}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} + \epsilon_i \right) - \frac{H_0}{2} \left( \frac{H_0 \sec \theta_0}{E_1 A} - \frac{\sigma_i}{E_1} + \epsilon_i \right) \right] \sec^2 \theta_0 dx_0 \quad (1.85)$$

按结构最小余能原理, 有

$$\delta V = 0 \quad (1.86)$$

由此式结合变形协调方程可求单索强化材料的相关问题。

以上关于强化材料悬索的能量公式推导, 包含了悬索弹性变形的能量公式。只要在上面式中, 令  $\sigma_i, \epsilon_i$  为零, 这些公式就表达了弹性变形的悬索能量和变分问题。

可以证明: 用  $\delta V=0$  可以导出悬索的平衡方程。为简单计, 这里用弹性变形公式进行推导, 至于强化材料的推导, 可以仿此进行。

由于

$$\delta(H^2) = 2H\delta H$$

在弹性阶段,

$$U = (H^2 - H_0^2) \int_0^l \frac{\sec^3 \theta_0}{2EA} dx_0 \quad (1.87)$$

$$\delta U = H \left( \delta H \int_0^l \frac{\sec^3 \theta_0}{EA} dx_0 \right) \quad (1.88)$$

再由弹性变形协调方程

$$(H - H_0) \int_0^l \frac{\sec^3 \theta_0}{EA} dx_0 = \int_0^l (\sec \theta - \sec \theta_0) \sec \theta_0 dx_0 \quad (1.89)$$

采用变分得

$$\delta H \int_0^l \frac{\sec^3 \theta_0}{EA} dx_0 = \int_0^l \delta (\sec \theta) \sec \theta_0 dx_0 \quad (1.90)$$

由式(1.88)和式(1.90)得

$$\delta U = H \int_0^l \delta(\sec\theta) \sec\theta_0 dx_0 \quad (1.91)$$

将  $\sec\theta$  看成  $\operatorname{tg}\theta$  的函数,即

$$\sec\theta = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)^{\frac{1}{2}} = (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} = f(\xi)$$

$$\xi = \operatorname{tg}\theta = \frac{dw}{dx}$$

则有

$$\begin{aligned} \delta(\sec\theta) &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \delta\xi = (1 + \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \xi \delta\xi \\ &= (1 + \operatorname{tg}^2\theta)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\theta \delta(\operatorname{tg}\theta) \\ &= \frac{1}{\sec\theta} \frac{\partial w}{\partial x} \delta\left(\frac{dw}{dx}\right) \end{aligned}$$

将上式代入式(1.91)得

$$\delta U = H \int_0^l \frac{\sec\theta_0}{\sec\theta} \frac{dw}{dx} \delta\left(\frac{dw}{dx}\right) dx_0 \quad (1.92)$$

考虑在小挠度情况下有  $\frac{\sec\theta_0}{\sec\theta} \approx 1$ , 并且

$$\frac{dw}{dx} \delta\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{dw}{dx} \frac{d}{dx}(\delta w) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} \delta w\right) - \frac{d^2w}{dx^2} \delta w$$

代入式(1.92)得

$$\begin{aligned} \delta U &= H \int_0^l \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} \delta w \right) - \frac{d^2w}{dx^2} \delta w \right] dx_0 \\ &= H \left[ \frac{dw}{dx} \delta w \right]_{x=0}^{x=l} - H \int_0^l \frac{d^2w}{dx^2} \delta w dx_0 \end{aligned}$$

由于索端点的垂直位置不变,即

$$\delta w|_{(x=0)} = 0 \quad \delta w|_{(x=l)} = 0$$

可得

$$\delta U = - \int_0^l H \frac{d^2w}{dx^2} \delta w dx_0 \quad (1.93)$$

外力功的变分为

$$\delta W = \int_0^l q \delta w dx_0$$

由此得

$$\delta V = \delta(W - U) = \int_0^l \left( q + H \frac{d^2w}{dx^2} \right) \delta w dx_0 = 0$$

由于  $\delta w$  是任意函数,必须有

$$q + H \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (1.94)$$

此即单索的平衡方程。

## 1.6 悬索的塑性强迫振动<sup>1)</sup>

现以图 1.7 所示的悬索单自由度振动问题为例,探讨用摄动法分析线性强化材料悬索的弹塑性强迫振动问题。

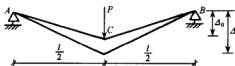


图 1.7 悬索的单自由度振动

图 1.7 中两端铰支的悬索单自由度振动在弹性范围内的分析是比较简单的。根据 C 点力矩为零的平衡条件,有

$$H_0 \Delta_0 = \frac{P}{2} \times \frac{l}{2} \quad (1.95)$$

$$H_0 = \frac{1}{4} \times \frac{Pl}{\Delta_0}$$

在静力状态, AC 的长度为  $\frac{S_0}{2}$ , 并且有

$$\frac{S_0}{2} = \sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

在小垂度的假设下, 由于  $\Delta_0/l \ll 1, \Delta/l \ll 1$ , 故有展开式

$$\frac{S_0}{2} \approx \frac{l}{2} \left(1 + \frac{2\Delta_0^2}{l^2}\right) \quad \frac{S}{2} \approx \frac{l}{2} \left(1 + \frac{2\Delta^2}{l^2}\right) \quad (1.96)$$

由此得出索伸长  $\Delta S$  为

$$\Delta S \approx \frac{2(\Delta^2 - \Delta_0^2)}{l} \quad (1.97)$$

按物理关系,

$$\Delta H = H - H_0 = \frac{EA}{l} \Delta S \quad (1.98)$$

式中,  $E$  为材料的弹性模量,  $A$  为索截面积。

设索张力的水平力在 C 点的垂直分力用  $V$  表示, 按式 (1.95) 分析, 有

$$V = \frac{4H\Delta}{l} = \frac{4}{l} \left[ H_0 \Delta + \frac{2EA(\Delta^2 - \Delta_0^2)\Delta}{l^2} \right] \quad (1.99)$$

令  $\delta = \Delta - \Delta_0$  表示悬索中点的相对变位, 则有

1) 贾乃文. 线性强化材料悬索的强迫振动. 力学与实践, 1999 年 6 期

$$V - P = V - \frac{4H_0\Delta_0}{l}$$

$$V - P = \left( \frac{4H_0}{l} + \frac{16EA\Delta_0^2}{l^3} \right) \delta + \frac{24EA\Delta_0}{l^3} \delta^2 + \frac{8EA}{l^3} \delta^3 \quad (1.100)$$

这个力应等于悬索的弹性恢复力  $-\frac{P}{g} \frac{d^2\delta}{dt^2}$ , 由此得出悬索在弹性变形的振动方程为

$$\frac{P}{g} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \left( \frac{4H_0}{l} + \frac{16EA\Delta_0^2}{l^3} \right) \delta + \frac{24EA\Delta_0}{l^3} \delta^2 + \frac{8EA}{l^3} \delta^3 = 0 \quad (1.101)$$

本节在此基础上, 进一步推导材料超过弹性变形之后, 进入强化变形时, 悬索的振动方程以及它的摄动解法。

设材料有线性强化的塑性物理关系为

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s) \quad (1.102)$$

材料进入弹性变形后的塑性强化阶段时, 悬索的水平张力  $H$  为

$$H = H_0 + \frac{2E_1A(\Delta^2 - \Delta_0^2)}{l^2} - \epsilon_s E_1 A + \sigma_s A \quad (1.103)$$

式中,  $\sigma_s$ 、 $\epsilon_s$  分别为材料进入塑性强化时刻的屈服应力和应变。

类比于弹性变形, 推出索张力  $H$  在跨中点有荷载  $P$  作用时的垂直分力  $V$ , 为

$$V = \frac{4H\Delta}{l} = \frac{4H_0\Delta}{l} + \frac{8E_1A(\Delta^2 - \Delta_0^2)\Delta}{l^3} - \frac{4\epsilon_s E_1 A \Delta}{l} + \frac{4\sigma_s A \Delta}{l}$$

令  $\delta = \Delta - \Delta_0$ , 并有  $-\frac{P}{g} \frac{d^2\delta}{dt^2} = V - P$ , 得出塑性强化变形时悬索结构的振动方程

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \left( \frac{4H_0 - 4\epsilon_s E_1 A + 4\sigma_s A}{l} + \frac{16E_1 A \Delta_0^2}{l^3} \right) \delta \\ + \frac{24E_1 A \Delta_0}{l^3} \delta^2 + \frac{8E_1 A}{l^3} \delta^3 + \frac{4\sigma_s A \Delta_0 - 4\epsilon_s E_1 A \Delta_0}{l} = 0 \end{aligned} \quad (1.104)$$

显然, 这是一个包含弹性和塑性两种情况的悬索振动方程, 是悬索振动更为普遍的表达式。如令式(1.104)中  $E_1 = E$ , 则式(1.104)与式(1.101)相同。

式(1.104)是一个非线性方程, 含有小变位  $\delta$ 、 $\delta^2$ 、 $\delta^3$  等项, 可以采用  $\delta$  小量的摄动法求解。引入以下各式:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4H_0 - 4\epsilon_s E_1 A + 4\sigma_s A}{l} + \frac{16E_1 A \Delta_0^2}{l^3} \\ \mu &= \frac{24E_1 A \Delta_0}{l^3} \\ \alpha_1 \mu^2 &= \frac{8E_1 A}{l^3} \\ c &= \frac{4\sigma_s A \Delta_0 - 4\epsilon_s E_1 A \Delta_0}{l} \end{aligned}$$

按摄动法理论, 将  $\delta$  展成

$$\delta = \delta_0 + \mu \delta_1 + \mu^2 \delta_2 + \dots \quad (1.105)$$

式中,  $\delta_0$  为零级近似解;  $\mu\delta_1$  为一级改正量;  $\mu^2\delta_2$  为二级改正量等。那么有

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d^2\delta_0}{dt^2} + \mu \frac{d^2\delta_1}{dt^2} + \mu^2 \frac{d^2\delta_2}{dt^2} + \dots \quad (1.106)$$

引入固有频率  $\omega^2 = \frac{g\lambda}{P}$ , 推出塑性强化阶段悬索振动的摄动方程为

$$\frac{d^2\delta_0}{dt^2} + \omega^2\delta_0 + \omega^2c = 0$$

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2} + \omega^2\delta_1 + \omega^2\delta_0^2 = 0$$

$$\frac{d^2\delta_2}{dt^2} + \omega^2\delta_2 + 2\omega^2\delta_0\delta_1 + \alpha_1\omega^2\delta_0^3 = 0$$

...

以上各式是关于  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$  的常微分方程。

解关于  $\delta_0$  的方程得

$$\delta_0 = a \sin(\omega t + \theta) - c \quad (1.107)$$

式中,  $a$  为振幅,  $\theta$  表示初相位, 其值分别是

$$a = \sqrt{c^2 + b^2} \quad \theta = \arctg \frac{c}{b}$$

式中,  $b$  为任意常数, 后面将给出其含义。

将  $\delta_0$  代入摄动方程第二式, 并考虑  $t=0$  时  $\delta_1=0, \frac{d\delta_1}{dt}=0$ , 求出  $\delta_1$  为

$$\begin{aligned} \delta_1 = & -\frac{a^2}{6} \cos[2(\omega t + \theta)] - c a \cos(\omega t + \theta) + \left( \frac{a^2}{6} \cos 2\theta + \frac{a^2 + 2c^2}{2} \right) \\ & \cdot \cos \omega t + \left( c a \cos \theta - \frac{a^2}{3} \sin 2\theta \right) \sin \omega t - \frac{1}{2} (a^2 + 2c^2) \end{aligned}$$

依次可再求出  $\delta_2, \delta_3$  等。

如仅取至  $\delta_1$  项, 则  $\delta$  为

$$\begin{aligned} \delta = & a \sin(\omega t + \theta) - c + \mu \left\{ -\frac{a^2}{6} \cos[2(\omega t + \theta)] - c a \cos(\omega t + \theta) \right. \\ & + \left( \frac{a^2}{6} \cos 2\theta + \frac{a^2 + 2c^2}{2} \right) \cos \omega t + \left( c a \cos \theta - \frac{a^2}{3} \sin 2\theta \right) \\ & \left. \cdot \sin \omega t - \frac{1}{2} (a^2 + 2c^2) \right\} \quad (1.108) \end{aligned}$$

显然, 在  $c=0$  时, 有  $a=b, \theta=0$ 。则此时的  $\delta$  为

$$\delta = b \sin \omega t - \frac{\mu b^2}{6} (3 - 4 \cos \omega t + \cos 2\omega t)$$

此即弹性变形时悬索振动的摄动解,  $b$  值含义在此。

$\mu a$  很小时, 由  $\frac{d\delta}{dt}=0$  可以求出塑性强化时悬索波峰时刻的零级近似解

$$t_0 = \frac{\pi - 2\theta}{2\omega} \quad (1.109)$$

一级近似解  $t_1$  的求解方程为

$$(a - \mu ac)\cos(\omega t_1 + \theta) = -\mu ac \frac{\pi - 2\theta}{2} + \mu \left( \frac{a^2}{6}\cos 2\theta + \frac{a^2 + 2c^2}{2} \right) \cos \theta - \mu \left( c a \cos \theta - \frac{a^2}{3}\sin 2\theta \right) \sin \theta$$

将  $t_0, t_1$  分别代入式 (1.108), 可求得相应的波峰值  $\delta_{\max}$ 。

**算例 1.4** 有  $l=6\text{m}$  的悬索, 跨中集中荷载  $P=1.2\text{kN}$ , 初始  $\Delta_0=0.06\text{m}$ ,  $H_0=30\text{kN}$ , 材料  $E=170\text{kN/mm}^2$ ,  $E_1=100\text{kN/mm}^2$ ,  $\sigma_s=180\text{N/mm}^2$ 。索断面  $A=11.8\text{mm}^2$ , 求悬索强化振动时的圆频率  $\omega$  及振动方程。

**解** 由以上数据算出

$$\lambda = 81.18\text{kN/m} \quad c = 0.04$$

$$\mu = 78.43\text{kN/m}$$

$$\alpha_1 \mu^2 = 435.74\text{kN/m}^2$$

由悬索结构静力计算公式

$$H\Delta = \frac{Pl}{4}$$

可知在  $\sigma_s=1.8\text{kN/mm}^2$  时该索进入塑性强化的荷载  $P=0.8\text{kN}$ 。在给定  $P=1.2\text{kN}$  时, 索进入塑性强化变形阶段, 此时结构圆频率  $\omega=25.75$ 。相同条件下弹性变形圆频率  $\omega=14.4$ 。

振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.244\text{s}$$

相应的振动方程为

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 663.24(\delta + 0.97\delta^2 + 5.37\delta^3) + 663.24 \times 0.04 = 0$$

在  $b=0.01, b=0.02, b=0.04$  时有

$$t_1 = 0.2631\text{s} \quad \delta_{\max} = 0.08812\text{m}$$

$$t_2 = 0.3902\text{s} \quad \delta_{\max} = 0.09731\text{m}$$

$$t_3 = 0.6507\text{s} \quad \delta_{\max} = 0.1043\text{m}$$

## 第二章 非线性索网结构

### 2.1 正交索网的基本方程

由纵横两族悬索交错放置形成的结构称为悬索网结构,简称索网结构。如果两族悬索交错放置是正交的,形成的索网就为正交索网结构。一般索网屋盖等索网都属于正交索网。当索网的边界是矩形或正方形时,这样的索网称矩形底索网;当索网的边界是圆形时,这样的索网称圆底索网。

索网结构的计算一般采用连续化薄膜比拟的办法,即将索网面视为一相同形式的“薄膜”,借用壳体结构的薄膜理论,即没有弯矩、横向剪力等内力,仅有张力存在的薄膜,从而求出索网面中张力。一般索网结构所用的索的数目很多,索网密实,其受力形式与薄膜非常相似。这种比拟方法避免了离散化解法中众多的索网结点方程和未知变量求解之困难。

索网结构的方程包括平衡方程和变形协调方程。

如图 2.1 所示,考虑索网结构平面中索网交点  $(i, j)$  的平衡,将  $(i, j)$  点附近的索看作  $abcd$  的薄膜。假定这个薄膜只承受张力而不能承受弯矩和剪力,则这个薄膜可以表达索网中索的受力性能。

现考虑  $abcd$  面积元素对于承受  $x$  方向两侧作用力的平衡,薄膜左端  $ab$  所受的力在垂直方向的分力为

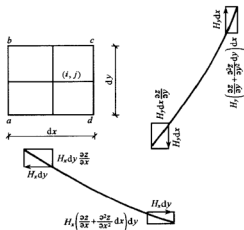


图 2.1 索网结构平面



$$H_x dy \frac{\partial z}{\partial x}$$

同样得薄膜面元素右端  $cd$  所受力的垂直分力为

$$H_x \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right) dy$$

两者的差值为

$$H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy$$

在  $y$  方向上,  $bc$  和  $ad$  上所作用的垂直力的差值为

$$H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy$$

在  $abcd$  面上所承受的重度为  $q(x, y) dx dy$  荷载。根据平衡条件, 应有

$$H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy + q(x, y) dx dy = 0$$

消去  $dx dy$  后, 得

$$H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.1)$$

而  $z$  应满足边界条件

$$z = z(l) \quad (\text{在边界 } l \text{ 上}) \quad (2.2)$$

式(2.1)和式(2.2)与第一章单索的平衡方程及边界条件相比, 是从一维扩大到二维的表达。如果  $H_x$ 、 $H_y$  函数为已知, 则由以上两式可定出  $z$ 。一般情况下,  $H_x$  仅为  $y$  的函数, 而  $H_y$  仅为  $x$  的函数。

在式(2.1)中, 有 3 个基本未知量, 即  $H_x$ 、 $H_y$  和  $z$ , 为了求出  $H_x$ 、 $H_y$ , 还应列出相应的变形协调方程。

先假定在  $q(x, y) = 0$  初始状态下, 索的水平张力  $H_{x_0}$ 、 $H_{y_0}$  和索的垂直坐标  $z_0$  为已知, 并且  $H_{x_0}$  和  $H_{y_0}$  满足基准状态方程

$$H_{x_0} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + H_{y_0} \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

$$z_0 = z(l) \quad (\text{在边界 } l \text{ 上}) \quad (2.4)$$

相应于单索情况, 可写出索网的变形协调方程。为简单计, 假定索网中每索本身的两个支点在相同高度上, 则有

$$\frac{1}{2} \int_{-l_y}^{l_y} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{2l_x}{EA_x} (H_x - H_{x_0}) \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-l_x}^{l_x} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \right] dy = \frac{2l_y}{EA_y} (H_y - H_{y_0}) \quad (2.6)$$

在上式中,  $2l_x$  表示某一根索沿着  $x$  方向的长度,  $2l_y$  表示某一根索沿  $y$  方向的长度,  $A_x$ 、 $A_y$  分别表示沿  $y$  和  $x$  方向每单位长度内索的截面积。显见,  $l_x$ 、 $A_x$  仅是  $y$

的函数,  $l_y, A_y$  仅是  $x$  的函数。在推导式(2.5)、(2.6)的变形协调方程式时, 认为索网的平面在  $x$  和  $y$  方向有对称轴。

索网问题的求解, 可以采用差分方法。有关差分法的一般原理, 读者可参阅本书附录一。这里直接列出单索及索网的差分方程。

对于单索, 考虑一个微小区段, 其长为  $h$ , 平衡方程可改写为差分形式方程

$$z_{i+1} + z_{i-1} - 2z_i = -\frac{h^2}{H} q(i) \quad (2.7)$$

并将垂直位移的边界条件写为

$$\left. \begin{aligned} z &= 0 & \text{在 } x=0 \\ z &= 0 & \text{在 } x=l \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

变形协调方程则将积分改为下列有限和的形式:

$$\frac{1}{2} \sum_i \frac{(z_{i+1} - z_i)^2}{h} = \frac{l}{EA} (H - H_0) \quad (2.9)$$

初始条件为

$$z = 0 \quad H = H_0 \quad \text{在 } q(x) = 0 \quad (2.10)$$

式(2.7)~(2.10)即是单索问题的差分方程。将索分成  $n$  个段, 其中有  $(n-1)$  个分点, 则有  $n$  个未知量  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  及  $H$ , 可用式(2.7)及(2.9)共  $n$  个方程进行求解。

同样, 对于索网将有相似的差分方程, 平衡方程式改为

$$\begin{aligned} H_k(z_{i+1,k} + z_{i-1,k}) + H_i(z_{i,k+1} + z_{i,k-1}) \\ - 2(H_k + H_i)z_{i,k} = -h^2 q_{i,k} \end{aligned} \quad (2.11)$$

在此处边界条件为

$$z = z_i \quad (\text{对于边界上点}) \quad (2.12)$$

同样, 对初始状态的  $H_{0k}, H_{0i}, z_0$  也有下列类似表达:

$$\left. \begin{aligned} H_{0k}(z_{0i+1,k} + z_{0i-1,k}) + H_{0i}(z_{0i,k+1} + z_{0i,k-1}) \\ - 2(H_{0k} + H_{0i})z_{0i,k} = 0 \\ z_0 = z_i \quad (\text{在边界上}) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

变形协调方程用差分表达为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{-l_k}^{l_k} [(z_{i+1,k} - z_{i,k})^2 - (z_{0i+1,k} - z_{0i,k})^2] \frac{1}{h} \\ = \frac{2l_k}{EA_k} (H_k - H_{0k}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{-l_i}^{l_i} [(z_{i,k+1} - z_{i,k})^2 - (z_{0i,k+1} - z_{0i,k})^2] \frac{1}{h} \\ = \frac{2l_i}{EA_i} (H_i - H_{0i}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

这样,索网问题转化为求式(2.11)~(2.15)的代数方程的解。这时设初始态  $H_{0x}$ 、 $H_{0y}$ 、 $z_0$  都是已知的。如果设横索为  $n$  根、纵索为  $m$  根,那么结点数共有  $nm$  个,即垂直变位  $z_{i,k}$  共有  $nm$  个未知数。索的张力共有  $n+m$  个未知数,式(2.11)~(2.15)恰为  $nm+n+m$  个方程,可以求解。在求解时将未知数分成两组,一组是位移  $z$ ,一组是索的张力  $H_i$  或  $H_k$ 。首先假定一组  $H_i$ 、 $H_k$  的值,依据式(2.11)和式(2.12)求出各结点的  $z$  值;再将此  $z$  值代入式(2.13)~(2.15)求出新的  $H_i$ 、 $H_k$  值。这样用循环迭代的方法可求出  $H$  和  $z$  的渐近解。

以上差分计算是将索网化为正交的  $x$  和  $y$  方向而计算的,因此它适用于矩形底的索网结构。应指出,用差分方法求解索网是随结点的增多而导致方程增多,过多结点自然带来运算的困难,所以差分方法有一定局限。

索网问题的更为广泛的解法是连续化计算方法,即将索网形成的曲面视为一连续的薄膜面,在此基础上寻求外荷载作用下的曲面形状,再由壳体结构的薄膜理论求出索中张力。

具体在求解连续化索网结构时,可以应用假想荷载最小二乘法。这个方法的具体步骤如下:

首先找一组位移函数  $z_1(x, y)$ ,  $z_2(x, y)$  ..., 使它们适合边界条件  $z_i = z_i(l)$ , 这只要令

$$z(a, b, c, \dots, x, y) = z_0(x, y) + az_1(x, y) + bz_2(x, y) + \dots \quad (2.16)$$

则位移函数  $z$  满足边界条件  $z = z(l)$ 。

根据已知的  $z$  和  $z_0$  的形式,用初等积分法可以从索网的变形协调方程式(2.5)和式(2.6)中求出索张力  $H_x^{(1)}$ 、 $H_y^{(1)}$  的形式,写为

$$H_x^{(1)}(a, b, c, \dots, y)$$

$$H_y^{(1)}(a, b, c, \dots, x)$$

根据已知的  $z$  和  $H_x^{(1)}$ 、 $H_y^{(1)}$  的形式,再由索网的平衡方程式(2.1),可用初等微分法求出假想荷载  $Q$ ,使之与实际荷载  $q(x, y)$  非常接近,让

$$Q(a, b, c, \dots, x, y) \rightarrow q(x, y)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} H_x^{(1)}(a, b, c, \dots, y) &\rightarrow H_x \\ H_y^{(1)}(a, b, c, \dots, x) &\rightarrow H_y \\ z(a, b, c, \dots, x, y) &\rightarrow z(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

这样便求得了索网问题的近似解。

参数  $a, b, c$  的选取可用最小二乘法,即假想荷载  $Q(a, b, c, \dots, x, y)$  与  $q(x, y)$  的平方误差为

$$V = \iint_f [Q(a, b, c, \dots, x, y) - q(x, y)]^2 dx dy \quad (2.18)$$

决定  $a, b, c$  各参数便化为求  $V$  的极小问题,应有

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial c} = 0 \quad \dots \quad (2.19)$$

根据这些方程可决定出  $a, b, c, \dots$  各参数之值。在以上求解过程中,假定  $H_{x0}, H_{y0}, z_0$  都是已知的,或实际工程设计者设定的。

显然,用连续化方法求解索网,不仅能适用于矩形底索网,也适用于圆形或其他形式底的索网,选取恰当的坐标还可利用对称性简化它们的计算。

**算例 2.1** 用最小二乘法计算周边铰支矩形索网。底面积  $2l_x \times 2l_y = 40\text{m} \times 30\text{m}$ 。设每索截面积为  $5.28\text{cm}^2$ ,索间距为  $1.5\text{m}$ 。索网承受外荷载为均匀分布的  $1.5\text{kN/m}^2$ ,索网及其他结构自重为  $0.7\text{kN/m}^2$ 。材料的  $E = 17 \times 10^3 \text{kN/cm}^2$ ,索的初始预张力  $H_{x_0} = 150\text{kN/m}, H_{y_0} = 150\text{kN/m}$ 。

**解** 由荷载及其荷载系数求出

$$q = 1.5 \times 1.4 + 0.7 \times 1.2 = 2.94\text{kN/m}^2$$

由每索面积求出单位宽度内的索网截面积分别为

$$A_x = A_y = \frac{5.28}{1.5} \times 10^{-4} = 3.52 \times 10^{-4}\text{m}$$

按周边铰支矩形索网的边界条件,选定索网的垂直挠度方程为

$$z = a(x^2 - 20^2)(y^2 - 15^2)$$

$$z_0 = 0$$

列出索网在  $x$  方向和  $y$  方向的变形连续性方程为

$$\frac{1}{2} \int_{-20}^{20} [2ax(y^2 - 255)]^2 dx = \frac{40(H_x - 150)}{17 \times 10^3 \times 3.52 \times 10^{-4}}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-15}^{15} [2ay(x^2 - 400)]^2 dy = \frac{30(H_y - 150)}{17 \times 10^3 \times 3.52 \times 10^{-4}}$$

由此解出

$$H_x = 15957333a^2(y^2 - 225)^2 + 150$$

$$H_y = 8976000a^2(x^2 - 400)^2 + 150$$

近似荷载函数  $Q(a, x, y)$  取为

$$\begin{aligned} Q(a, x, y) &= -H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &= -2a(y^2 - 255)[15957333a^2(y^2 - 225)^2 + 150] \\ &\quad - 2a(x^2 - 400)[8976000a^2(x^2 - 400)^2 + 150] \end{aligned}$$

利用最小二乘法,建立函数积分式为

$$4 \int_0^{20} \int_0^{15} [\theta(a, x, y) - q]^2 dx dy = V$$

再由  $\frac{\partial V}{\partial a} = 0$ , 得出

$$a = 9.25 \times 10^{-6}$$

最后求出

$$H_x = 150 + 1.37 \times 10^{-3}(y^2 - 225)^2 \text{ kN/m}$$

$$H_y = 150 + 7.7 \times 10^{-4}(x^2 - 400)^2 \text{ kN/m}$$

分别是与  $x$  或  $y$  有关的值。

这样就给出了索网挠度  $z$  及索中内力。

## 2.2 鞍形索网的弹性计算

鞍形索网是由相互正交和曲率相反的两组钢索组成,形成负高斯曲率的曲面。两组钢索在各交点处相互连接,索网锚定在强大的周边构件上,用连续化方法计算索网是将索的截面沿曲面展开,将索网看作薄膜进行计算。

鞍形索网计算中,设初始形状、初始荷载、索网初始张力等均已知,并假设索是理想柔性的。本节先研究索在弹性变形范围及小挠度变形范围的情况。

如果索网在初始状态下曲面形状为  $z_0 = z_0(x, y)$ , 承受初始荷载  $q_0(x, y)$  作用,两个方向索内初张力分别为  $H_{x_0}$ 、 $H_{y_0}$ ,两个方向折算刚度分别是  $EA_x$  为  $y$  的函数,  $EA_y$  为  $x$  的函数。

在初始状态下加竖向荷载增量  $\Delta q$ ,索网产生 3 个方向的位移,分别表示为  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 。此时索网曲面形状为  $z(x, y) = z_0(x, y) + w$ 。一般情况下,  $u$ 、 $v$  与  $w$  相比是高阶小量,故索变形仅计算竖向挠度  $w$ 。

加荷后索内水平张力达到

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_{x_0} + \Delta H_x \\ H_y &= H_{y_0} + \Delta H_y \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

式中,  $H_{x_0}$ 、 $\Delta H_x$  以及  $H_x$  为  $y$  的函数,  $\Delta H_y$ 、 $H_{y_0}$  以及  $H_y$  为  $x$  的函数。

索网上  $dx$ 、 $dy$  微段,按连续化理论考虑薄膜微元在  $z$  方向的平衡关系,如图 2.2 中所示,则有

$$H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy + q dx dy = 0$$

化简后得

$$H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + q = 0 \quad (2.21)$$

同样,在初始状态下索内张力应满足式(2.21)平衡方程,即有

$$H_{x_0} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + H_{y_0} \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + q_0 = 0 \quad (2.22)$$

在荷载从  $q_0$  增加到  $q = q_0 + \Delta q$  时,利用式(2.21)平衡方程,有

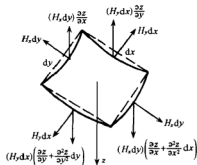


图 2.2 索薄膜微元

$$\begin{aligned} & (H_{x_0} + \Delta H_x) \left( \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & + (H_{y_0} + \Delta H_y) \left( \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q_0 + \Delta q = 0 \end{aligned}$$

展开上式,并减去式(2.22)得

$$\begin{aligned} & H_{x_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{y_0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \Delta H_x \left( \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & + \Delta H_y \left( \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \Delta q = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

即为索网平衡方程的增量形式。

主索为  $x$  方向,它的微元的伸长要综合考虑  $u$ 、 $v$  和  $w$  的影响,在  $x$  方向有

$$\begin{aligned} dS - dS_0 &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} dx \\ &\quad - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2} dx \end{aligned}$$

略去高阶微量  $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial x}$  的二次方项,在小挠度变形条件下,上式改为

$$dS - dS_0 = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

任意位置的主索的伸长为

$$\Delta S = \int (dS - dS_0) = U_N - U_M + \int_M^N \left[ \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.24)$$

式中,  $M$ 、 $N$  为主索的两个边界点;  $U_N$ 、 $U_M$  为这两点的水平位移。

如果仅考虑由拉伸变形引起的伸长,由弹性物理关系得

$$\Delta S = \Delta H_x \frac{l_x}{EA_x} \quad (2.25)$$

式中,  $l_x$  为主索  $MN$  的跨长。结合(2.24)及(2.25)两式,得主索变形协调方程为

$$\Delta H_x \frac{l_x}{EA_x} = U_N - U_M + \int_M^N \left[ \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.26)$$

副索为稳定索,它的方向为  $y$  方向,同样得出稳定索长的变形协调方程为

$$\Delta H_y \frac{l_y}{EA_y} = U_N' - U_M' + \int_M'^N' \left[ \frac{\partial z_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2.27)$$

式中,  $U_N'$ 、 $U_M'$  为副索边界点  $N'$ 、 $M'$  的位移。从理论上说,当给定初始状态并已知索网周边条件时,由平衡方程式(2.21)、变形协调方程式(2.26)和式(2.27),可以求出 3 个未知量  $w$ 、 $\Delta H_x$  及  $\Delta H_y$ 。

现以双曲抛物面为例,说明以上公式的应用计算过程。双曲抛物面方程为

$$z = -f_1 \left( \frac{x}{a} \right)^2 + f_2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 \quad (2.28)$$

式中,  $f_1$  为中央主索跨中垂度,  $f_2$  为中央副索跨中拱度。其形状如图 2.3 所示, 但图 2.3 仅表示索网底平面为矩形平面的情况, 还有索网底为其他形状的鞍形索网, 例如椭圆形底等。对式(2.28)取二阶导数, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2f_1}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2f_2}{b^2}$$

代入索网平衡方程(2.21)中, 有

$$-\frac{2f_1}{a^2}H_x + \frac{2f_2}{b^2}H_y + q = 0$$

由于  $H_x$  仅是  $y$  的函数,  $H_y$  仅是  $x$  的函数, 所以在均布荷载作用下,  $H_x$  和  $H_y$  必是常数。在初始状态下, 索网内的张力必满足平衡方程

$$-\frac{2f_1}{a^2}H_{x_0} + \frac{2f_2}{b^2}H_{y_0} = 0$$

$$\frac{H_{x_0}}{H_{y_0}} = \frac{a^2 f_2}{b^2 f_1}$$

表明两个方向的预张应力与曲面在相应方向的曲率成反比。

如果索网底平面是椭圆, 这时索网边缘构件在  $xy$  平面上投影为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

式中,  $a$  和  $b$  分别为椭圆的长半轴及短半轴。初始状态曲面方程为

$$z_0 = -f_1 \left( \frac{x^2}{a^2} \right) + f_2 \left( \frac{y^2}{b^2} \right)$$

在均匀荷载下, 周边为铰支条件。按竖向位移对称考虑, 假设挠度函数为

$$w(x, y) = w_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

式中,  $w_0$  为待定常数。一般地, 认为边缘构件刚度很大, 所以认为索网周边竖向位移为零。显然上面设定的  $w(x, y)$  满足这一条件。由以上给出的  $z_0$  和  $w$ , 可以求出

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} = -\frac{2f_1}{a^2}x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2w_0}{a^2}x$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial y} = +\frac{2f_2}{b^2}y$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{2w_0}{b^2}y$$

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = -\frac{2f_1}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{2w_0}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = \frac{2f_2}{b^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = -\frac{2w_0}{b^2}$$

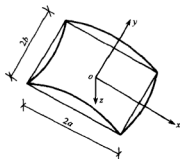


图 2.3 平面为矩形鞍形索网

将这些微分表达式代入变形协调方程(2.26)及(2.27),并在椭圆内积分,经整理后得

$$\Delta H_x = \frac{2EA_x}{3a^2}[2f_1w_0 + w_0^2]\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + \frac{EA_x(U_N - U_M)}{2a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} \quad (2.29)$$

$$\Delta H_y = \frac{2EA_y}{3b^2}[-2f_2w_0 + w_0^2]\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{EA_y(U_N - U_M)}{2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \quad (2.30)$$

将上面  $\Delta H_x$ 、 $\Delta H_y$  以及  $z_0$ 、 $w$  的微分表达式代入增量形索网平衡方程,经整理后得

$$S(x, y, w_0) = A_0w_0^3 + A_1w_0^2 + (A_2 + A'_2)w_0 + A_3 + A'_3$$

式中,  $A_0$ 、 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  是  $x$ 、 $y$  的函数,  $A'_2$ 、 $A'_3$  亦是  $x$ 、 $y$  的函数,并分别表示为

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{4EA_x}{3a^4}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{4EA_y}{3b^4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ A_1 &= -\frac{4EA_xf_1}{a^4}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{4EA_yf_2}{b^4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ A_2 &= -\frac{2H_{x_0}}{a^2} - \frac{2H_{y_0}}{b^2} - \frac{8EA_xf_1^2}{3a^4}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{8EA_yf_2^2}{3b^4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ A_3 &= \Delta q \\ A'_2 &= \frac{EA_x(U_N - U_M)}{a^3\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} - \frac{EA_y(U_N - U_M)}{b^3\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \\ A'_3 &= \frac{EA_xf_1(U_N - U_M)}{a^3\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} - \frac{EA_yf_2(U_N - U_M)}{b^3\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \end{aligned}$$

引用迦辽金变分方程

$$\iint_D S(x, y, w_0) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy = 0$$

将  $S$  代入上式,并进行积分,整理成  $w_0$  的三次代数方程:

$$\beta_0w_0^3 + \beta_1w_0^2 + (\beta_2 + \beta'_2)w_0 + \beta_3 + \beta'_3 = 0$$

式中

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{EA_x}{a^4} + \frac{EA_y}{b^4} \\ \beta_1 &= 3\left(\frac{EA_xf_1}{a^4} + \frac{EA_yf_2}{b^4}\right) \\ \beta_2 &= \frac{9}{5}\left(\frac{H_{x_0}}{a^2} + \frac{H_{y_0}}{b^2}\right) + 2\left(\frac{EA_xf_1^2}{a^4} + \frac{EA_yf_2^2}{b^4}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\beta_3 &= -\frac{9}{10}\Delta q \\ \beta_2 &= \frac{9}{5\pi ab} \iint_D \left[ \frac{EA_x(U_N - U_M)}{a^3 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} - \frac{EA_y(U_N - U_M)}{b^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \right] \\ &\quad \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy \\ \beta_1 &= \frac{9}{5\pi ab} \iint_D \left[ \frac{EA_x f_1(U_N - U_M)}{a^3 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} - \frac{EA_y f_2(U_N - U_M)}{b^3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \right] \\ &\quad \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy\end{aligned}$$

由以上方程解出  $w_0$  之后,代入式(2.29)和式(2.30),即可求出主、副索内的水平张力增量以及水平张力。

**算例 2.2** 设计与计算一椭圆底平面鞍形索网。椭圆底长半轴  $a=30\text{m}$ ,短半轴  $b=20\text{m}$ ,每根索截面积为  $5.28\text{cm}^2$ [六股  $\phi 12(7\phi 4)$ ],主索间距为  $1.2\text{m}$ ,副索间距为  $1.6\text{m}$ ,材料弹性模量  $E=17\times 10^3\text{kN/cm}^2$ ,初始主索跨中垂度  $f_1=4.2\text{m}$ ,副索跨中拱度  $f_2=2.8\text{m}$ ,  $H_{x_0}=150\text{kN/m}$ ,  $H_{y_0}=135\text{kN/m}$ ,屋面活载取  $1.5\text{kN/m}^2$ ,结构自重及附属结构重  $0.7\text{kN/m}^2$ 。

**解** 由以上各条件求出单位宽度内索截面积分别是

$$\begin{aligned}A_x &= \frac{5.28}{1.2} = 4.4\text{cm}^2 & A_y &= \frac{5.28}{1.6} = 3.3\text{cm}^2 \\ \beta_0 &= \frac{EA_x}{a^4} + \frac{EA_y}{b^4} = 0.4430 \\ \beta_1 &= 3 \left( \frac{EA_x f_1}{a^4} - \frac{EA_y f_2}{b^4} \right) = -1.7817 \\ \beta_2 &= \frac{9}{5} \left( \frac{H_{x_0}}{a^2} - \frac{H_{y_0}}{b^2} \right) + 2 \left( \frac{EA_x f_1^2}{a^4} + \frac{EA_y f_2^2}{b^4} \right) = 8.4483 \\ \beta_3 &= -\frac{9}{10}\Delta q = -1.98\end{aligned}$$

按周边铰支条件知  $U_N=U_M=0$ ,其他系数为零。

列出关于  $w_0$  的三次代数方程为

$$w_0^3 - 4.0219w_0^2 + 19.0707w_0 - 4.4695 = 0$$

利用牛顿迭代法求出其  $w_0$ ,即

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 4.0219x^2 + 19.0707x - 4.4695 \\ f'(x) &= 3x^2 - 8.0438x + 19.0707\end{aligned}$$

利用  $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  估计一个在  $0.2\sim 0.3$  之间的根,可取  $x=0.25$  进行迭代,

两次迭代之后已满足 4 位有效数字精度。最后得

$$w_0 = 0.2464$$

$$\Delta H_x = \frac{2EA_x}{3a^2}(2f_1w_0 + w_0^2)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$= 118.05\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \text{ kN}$$

$$\Delta H_y = \frac{2EA_y}{3b^2}(-2f_2w_0 + w_0^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$= -123.34\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \text{ kN}$$

$$H_x = H_{x_0} + \Delta H_x = 150 + 118.05\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \text{ kN}$$

$$H_y = H_{y_0} + \Delta H_y = 135 - 123.34\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \text{ kN}$$

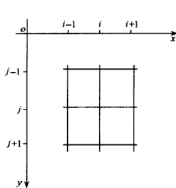
此时中央主索的最大张力值为  $H_x = 268.05 \text{ kN}$ ，而中央副索的最大张力值为  $H_y = 11.66 \text{ kN}$ 。

## 2.3 非线性材料索网的差分计算<sup>1)</sup>

这里研究的非线性材料指线性强化材料，其物理方程为  $\sigma = \sigma_e + E_1(\epsilon - \epsilon_e)$ 。用差分法计算线性强化材料的索网是由作者首先提出的索网设计理论。

索网结构的平面是二维的，其任意一点  $(i, j)$  的坐标如图 2.4 所示。设荷载作用在节点上，坐标增量为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$



用  $P_{ij}$ 、 $w_{ij}$  分别表示  $(i, j)$  点的外荷载及挠度。 $x$  方向网点  $(i-1, j)$ 、 $(i, j)$  间索长  $l_{ij}^x$ 、张力  $N_{ij}^x$  分别为

$$\left. \begin{aligned} l_{ij}^x &= \Delta x_i \left[ 1 + \left( \frac{\Delta w_{ij}^x}{\Delta x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ N_{ij}^x &= H_{x_i} \left[ 1 + \left( \frac{\Delta w_{ij}^x}{\Delta x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

再按力的平衡，给出剪力  $V_{ij}^x$  为

$$V_{ij}^x = H_{x_i} \frac{\Delta w_{ij}^x}{\Delta x_i} \quad (2.32)$$

图 2.4 索网平面坐标表示

类似地，可以写出  $y$  方向网点  $(i, j-1)$ 、 $(i, j)$  间索长  $l_{ij}^y$ 、张力  $N_{ij}^y$ 、剪力  $V_{ij}^y$  的公式：

1) 贾乃文，张润民. 线性强化材料悬索及索网计算. 土木工程学报, 1996 年 4 期

$$l_{ij}^y = \Delta y_j \left[ 1 + \left( \frac{\Delta w_{ij}^y}{\Delta y_j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

$$N_{ij}^y = H_{y_j} \left[ 1 + \left( \frac{\Delta w_{ij}^y}{\Delta y_j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.34)$$

$$V_{ij}^y = H_{y_j} \frac{\Delta w_{ij}^y}{\Delta y_j} \quad (2.35)$$

式中

$$\Delta w_{ij}^x = w_{ij} - w_{i-1,j}$$

$$\Delta w_{ij}^y = w_{ij} - w_{i,j-1}$$

按 $(i, j)$ 节点的平衡可以列出

$$V_{ij}^x + V_{ij}^y - V_{i+1,j}^x - V_{i,j+1}^y = P_{ij} \quad (2.36)$$

代入式(2.1)并整理,得索网平衡方程差分式

$$\begin{aligned} H_{x_i} \left[ -\frac{w_{i-1,j}}{\Delta x_i} + \left( \frac{1}{\Delta x_i} + \frac{1}{\Delta x_{i+1}} \right) w_{ij} - \frac{w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1}} \right] \\ + H_{y_j} \left[ -\frac{w_{i,j-1}}{\Delta y_j} + \left( \frac{1}{\Delta y_j} + \frac{1}{\Delta y_{j+1}} \right) w_{ij} - \frac{w_{i,j+1}}{\Delta y_{j+1}} \right] = P_{ij} \end{aligned} \quad (2.37)$$

参照单索变形协调方程的推导方法,可以相应建立索网的变形协调方程差分式。如果设各索原长度分别为 $l_{x_{ij}}^0, l_{y_{ij}}^0$ ,各索段内张力为 $N_{x_{ij}}^0, N_{y_{ij}}^0$ ,对于 $x$ 方向索,在 $\epsilon > \epsilon_c$ 时协调方程为

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left[ \left( \frac{N_{x_{ij}} - N_{x_{ij}}^0}{E_1 A_{x_j}} - \frac{\sigma_c}{E_1} + \epsilon_i \right) l_{x_{ij}}^0 \right] = \sum_{i=1}^{n+1} (l_{x_{ij}} - l_{x_{ij}}^0) \quad (2.38)$$

在 $y$ 方向, $\epsilon > \epsilon_c$ 时有协调方程

$$\sum_{j=1}^{m+1} \left[ \left( \frac{N_{y_{ij}} - N_{y_{ij}}^0}{E_1 A_{y_j}} - \frac{\sigma_c}{E_1} + \epsilon_j \right) l_{y_{ij}}^0 \right] = \sum_{j=1}^{m+1} (l_{y_{ij}} - l_{y_{ij}}^0) \quad (2.39)$$

式中, $n$ 和 $m$ 分别为索在 $x$ 方向和 $y$ 方向的段数; $l_{x_{ij}}, l_{y_{ij}}$ 为终态索长; $N_{x_{ij}}, N_{y_{ij}}$ 为终态的索中内力。

综合式(2.37)~(2.39),可知对于 $n \times m$ 个网点的四边形索网结构,有 $n \times m$ 个平衡方程以及 $n+m$ 个协调方程式。而作为未知数的变量 $w_{ij}$ 是 $n \times m$ 个节点挠度,另外有 $H_{x_i}$ 和 $H_{y_j}$ 共 $n+m$ 个索的水平张力, $N_{ij}$ 和 $l_{ij}$ 各项是中间可求变量。这样可以利用解线性代数方程组的办法由计算机求解各 $w_{ij}, H_{x_i}$ 和 $H_{y_j}$ 等。

应当指出,在 $n$ 和 $m$ 足够大时,线性代数方程组中代数方程过多,也会带来计算上的困难,因此以上差分法在求解 $n$ 与 $m$ 过多的索网时有一定难度,应改用连续化算法。

**算例 2.3** 设边长各 16m 的矩形底索网结构,周边为铰支,网格双向间距均为 4m。索截面积均为  $0.001\text{m}^2$ ,强化值  $E_1 = 1.0 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ ,材料极限值  $\sigma_c = 180$

N/mm<sup>2</sup>。设网点初始荷载为零,加载 8kN(节点荷载),用差分法求索网中的各索内力。

解 经编制程序并由计算机求得的计算结果如表 2.1 所示。表中  $w^0$  为初挠度,  $w$  为加载后的挠度;  $N_x$ 、 $N_y$  为索中各段内力。

表 2.1 四网点索网结构挠度及内力

$j$	$i$			
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$j=1$	$w^0=1.6$ $w=1.75$	$w^0=2.2$ $w=2.4$	$w^0=2.8$ $w=3.0$	$w^0=3.4$ $w=3.6$
	$l_x^0=4.04$ $l_x=4.07$	$l_x^0=4.0$ $l_x=4.03$	$l_x^0=4.0$ $l_x=4.0$	$l_x^0=4.04$ $l_x=4.03$
	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.07$	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.05$	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.04$	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.04$
	$F_x^0=101$ $F_x=157$	$F_x^0=100$ $F_x=200$	$F_x^0=100$ $F_x=199$	$F_x^0=101$ $F_x=155$
	$F_y^0=101$ $F_y=157$	$F_y^0=101$ $F_y=156$	$F_y^0=101$ $F_y=156$	$F_y^0=101$ $F_y=155$
$j=2$	$w^0=2.2$ $w=2.4$	$w^0=2.2$ $w=2.7$	$w^0=2.6$ $w=2.9$	$w^0=2.8$ $w=3.0$
	$l_x^0=4.04$ $l_x=4.05$	$l_x^0=4.0$ $l_x=4.01$	$l_x^0=4.0$ $l_x=4.0$	$l_x^0=4.04$ $l_x=4.04$
	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.03$	$l_y^0=4.0$ $l_y=4.01$	$l_y^0=4.0$ $l_y=4.0$	$l_y^0=4.0$ $l_y=4.0$
	$F_x^0=101$ $F_x=156$	$F_x^0=100$ $F_x=200$	$F_x^0=100$ $F_x=199$	$F_x^0=101$ $F_x=155$
	$F_y^0=101$ $F_y=200$	$F_y^0=100$ $F_y=200$	$F_y^0=100$ $F_y=199$	$F_y^0=100$ $F_y=200$
$j=3$	$w^0=2.8$ $w=3.0$	$w^0=2.6$ $w=2.88$	$w^0=2.4$ $w=2.68$	$w^0=2.2$ $w=2.4$
	$l_x^0=4.04$ $l_x=4.04$	$l_x^0=4.0$ $l_x=4.0$	$l_x^0=4.0$ $l_x=4.0$	$l_x^0=4.04$ $l_x=4.04$
	$l_y^0=4.0$ $l_y=4.0$	$l_y^0=4.0$ $l_y=4.0$	$l_y^0=4.0$ $l_y=4.0$	$l_y^0=4.0$ $l_y=4.01$
	$F_x^0=101$ $F_x=156$	$F_x^0=100$ $F_x=199$	$F_x^0=100$ $F_x=199$	$F_x^0=101$ $F_x=156$
	$F_y^0=100$ $F_y=199$	$F_y^0=100$ $F_y=199$	$F_y^0=100$ $F_y=199$	$F_y^0=100$ $F_y=200$
$j=4$	$w^0=3.4$ $w=3.6$	$w^0=2.8$ $w=3.0$	$w^0=2.2$ $w=2.2$	$w^0=1.6$ $w=1.6$
	$l_x^0=4.04$ $l_x=4.04$	$l_x^0=4.0$ $l_x=4.0$	$l_x^0=4.0$ $l_x=4.01$	$l_x^0=4.04$ $l_x=4.05$
	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.03$	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.04$	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.04$	$l_y^0=4.04$ $l_y=4.05$
	$F_x^0=101$ $F_x=155$	$F_x^0=100$ $F_x=199$	$F_x^0=100$ $F_x=200$	$F_x^0=101$ $F_x=156$
	$F_y^0=101$ $F_y=155$	$F_y^0=101$ $F_y=155$	$F_y^0=101$ $F_y=156$	$F_y^0=101$ $F_y=156$

分别求出各水平力为

$$H_{x_1} = 1510\text{kN} \quad H_{y_1} = 1510\text{kN}$$

$$H_{x_2} = 1990\text{kN} \quad H_{y_2} = 1990\text{kN}$$

$$H_{x_3} = 1990\text{kN} \quad H_{y_3} = 1990\text{kN}$$

$$H_{x_4} = 1510\text{kN} \quad H_{y_4} = 1510\text{kN}$$

节点编号如图 2.4 所示,由原点向  $x$ 、 $y$  方向依次  $i$ 、 $j$  为 1~4。

从计算结果看出,  $l_x^0 \approx l_x$ ,  $l_y^0 \approx l_y$ , 但  $w^0$  与  $w$  却有较大不同,反映出悬索结构受力后竖向变位是主要的。

式(2.38)、(2.39)是材料在强化阶段的索网结构变形协调方程。如将公式中的  $E_1$  改为  $E$ , 去掉  $\varepsilon_i$  项及  $\sigma_i$  项, 则可表示为弹性范围内的变形协调方程。

如果将式(2.38)、(2.39)中  $\sigma_i$  代以许用应力  $\sigma$ , 则可求出材料从弹性过渡到强化阶段的“突变”的变形协调方程:

在  $x$  方向:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left[ \left( \frac{N_{x_{ij}} - N_{x_{ij}}^0}{EA_{x_i}} \right) l_{x_{ij}}^0 \right] = \sum_{i=1}^{n+1} (l_{x_{ij}} - l_{x_{ij}}^0) \quad (2.40)$$

在  $y$  方向:

$$\sum_{j=1}^{m+1} \left[ \left( \frac{N_{y_{ij}} - N_{y_{ij}}^0}{EA_{y_j}} \right) l_{y_{ij}}^0 \right] = \sum_{j=1}^{m+1} (l_{y_{ij}} - l_{y_{ij}}^0) \quad (2.41)$$

在结构设计时, 由  $\sigma = \sigma_i$  或某一许用应力  $\sigma$ , 利用式(2.40)、(2.41)及平衡方程, 估算出相应的外荷载, 称为弹性极限荷载。当外荷载超过此弹性极限荷载时, 结构处于强化阶段。这时要利用平衡方程(2.37)、变形协调方程(2.38)、(2.39)求解索网中的拉力。

为说明计入材料的强化特性对结构承载力的提高, 这里利用算例 2.3 进行对比计算。取  $\sigma = 1500 \text{ N/mm}^2$ ,  $E = 1.6 \times 10^5 \text{ kN/mm}^2$ , 索网结构相同, 弹性计算节点荷载不大于  $6 \text{ kN/mm}^2$ 。与本算例节点荷载在强化阶段为  $8 \text{ kN}$  相比, 考虑强化效应, 承载力提高了 1.3 倍多。

计算表明, 索网结构在节点荷载作用下, 除边界跨段外, 其余跨段的水平张力相差不大。这与悬索结构在均匀荷载作用下, 已经证明其水平张力为常数的特性有关。可以认为在材料进入塑性强化阶段时, 除跨边部分外, 跨中大部分跨段可用本节的强化阶段的内力式计算, 尤其对正方形均匀荷载下的索网, 更为适用。

## 2.4 鞍形索网的塑性计算<sup>1)</sup>

参照 2.2 节, 本节进行鞍形索网的塑性计算。鞍形索网的空间曲面方程为

$$z = -f_1 \left( \frac{x}{a} \right)^2 + f_2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 \quad (2.42)$$

式中,  $f_1$ 、 $f_2$  分别为  $x$ 、 $y$  方向索网的最大矢高; 索网底呈椭圆形,  $a$ 、 $b$  分别是  $x$ 、 $y$  方向椭圆的长、短半轴。

以  $q$  表示索网面承受的均匀外荷载, 索网的平衡方程为

$$H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + q = 0 \quad (2.43)$$

设在初始荷载  $q_0$  作用下, 索网的挠度为  $z_0$ , 其水平张力分别为  $H_{x_0}$ 、 $H_{y_0}$ ; 荷载

1) 贾乃文等. 用逐点法计算强化材料鞍形索网. 空间结构, 1999 年 4 期

增加  $\Delta q$ , 索网挠度增加  $w$ , 水平张力分别增加  $\Delta H_x, \Delta H_y$ 。则由式(2.43)可推出平衡方程增量式:

$$\begin{aligned} H_{x_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{y_0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \Delta H_x \left( \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ + \Delta H_y \left( \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \Delta q = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

这一方程是利用  $q_0$  与  $q_0 + \Delta q$  两次平衡条件得到的。它无论在弹性变形阶段, 还是在塑性强化阶段, 都是适用的。但作为索网结构的另一基本方程——变形协调方程, 索网在弹性变形阶段与塑性变形阶段, 其表达式是不同的。这是处理线性强化材料索网的关键。

在弹性变形阶段, 索的伸长  $\Delta S$  与索中张力之间有如下物理关系:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S &= \Delta H_x \frac{l_x}{EA_x} \\ \Delta S &= \Delta H_y \frac{l_y}{EA_y} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

式中,  $E$  为索网材料的弹性模量;  $l_x, l_y$  分别为  $x, y$  方向的索长;  $A_x, A_y$  分别为  $y, x$  方向单位长度内索截面积。

如果材料是线性强化的, 在弹性变形之后的塑性强化阶段, 其应力-应变关系为

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s) \quad (2.46)$$

式中,  $\sigma_s = E\epsilon_s$ ;  $E_1$  为材料进入线性强化阶段的模量。将式(2.45)与式(2.46)结合, 得出强化阶段的物理关系为

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_x &= \Delta H_x \frac{l_x}{E_1 A_x} + \sigma_s \left( \frac{l_x}{E} - \frac{l_x}{E_1} \right) \\ \Delta S_y &= \Delta H_y \frac{l_y}{E_1 A_y} + \sigma_s \left( \frac{l_y}{E} - \frac{l_y}{E_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

这时, 索网的变形协调方程为

$$\begin{aligned} \Delta H_x \frac{l_x}{E_1 A_x} + \sigma_s \left( \frac{l_x}{E} - \frac{l_x}{E_1} \right) \\ = u_N - u_M + \int_M^N \left[ \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \Delta H_y \frac{l_y}{E_1 A_y} + \sigma_s \left( \frac{l_y}{E} - \frac{l_y}{E_1} \right) \\ = u_q - u_p + \int_p^q \left[ \frac{\partial z_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{aligned} \quad (2.49)$$

式中,  $u_N, u_M$  为索网边梁在  $x$  方向的位移值,  $u_q, u_p$  为索网边梁在  $y$  方向的位移值。

以上式(2.44)、(2.48)、(2.49)即是线性强化索网在塑性变形阶段的内力计算公式。

底平面为椭圆形的鞍形索网,它的边缘构件是呈空间曲线形状的封闭圈梁。设  $a$  和  $b$  分别是该椭圆的长、短半轴。在均布荷载作用下,周边为铰支条件,索网的挠度位移函数  $w(x, y)$  可取为

$$w = w_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (2.50)$$

式中,  $w_0$  为待定参数,表示索网中央点的竖向位移值。

线性强化材料鞍形索网的塑性计算,也可采用迦辽金法求解。即首先选择含有待定常数  $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 并满足边界条件的挠度函数  $w(x, y)$ , 将其代入变形协调方程后, 导出水平张力增量  $\Delta H_x, \Delta H_y$ 。再代入  $\Delta H_x, \Delta H_y$  表达的平衡方程, 让它最优地接近于零, 由此确定常数  $c_i$ 。在塑性强化阶段进行以上计算时, 应当用式 (2.44)、(2.48)、(2.49)。与弹性计算不同, 在塑性强化阶段计算时, 迦辽金变分方程的表达也是不同的。

线性强化材料鞍形索网塑性计算的迦辽金变分方程取为

$$\iint_{\Omega} F(x, y, c_i) w dx dy \quad (2.51)$$

式中,  $w$  为权函数, 对底面为椭圆的鞍形索网, 可取式 (2.50);  $F(x, y, c_i)$  即为由  $\Delta H_x$  与  $\Delta H_y$  代入平衡方程后获得的函数, 所含有的待定常数  $c_i$  在这里取为  $w_0$ ; 积分范围  $\Omega$  是椭圆。

按式 (2.50), 这里计算出的类似于弹性计算中的  $S$  函数表达为

$$S = A_0 w^3 + A_1 w^2 + A_2 w + A_3 \quad (2.52)$$

其中

$$A_0 = -\frac{4E_1 A_z}{3a^4} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{4E_1 A_y}{3b^4} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (2.53)$$

$$A_1 = -\frac{4E_1 A_z f_1}{a^4} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{4E_1 A_y f_2}{b^4} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (2.54)$$

$$A_2 = -\left( \frac{2H_{x_0}}{a^2} + \frac{2H_{y_0}}{b^2} \right) - \frac{8E_1 A_z f_1^2}{3a^4} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{8E_1 A_y f_2^2}{3b^4} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{2f_1}{a^2} \left( \frac{\sigma_1 E}{E_1} - \sigma_1 \right) - \frac{2f_2}{b^2} \left( \frac{\sigma_1 E}{E_1} - \sigma_1 \right) \quad (2.55)$$

$$A_3 = \Delta q + \frac{2f_1}{a^2} \left( \frac{\sigma_1 E}{E_1} - \sigma_1 \right) - \frac{2f_2}{b^2} \left( \frac{\sigma_1 E}{E_1} - \sigma_1 \right) \quad (2.56)$$

这一表达式与 2.2 节弹性变形鞍形索网结构的迦辽金变分方程是不同的。仅在  $E_1 = E$  时, 这里的公式才与前者相同。

将式 (2.50) 代入式 (2.51) 中, 并作椭圆底面积的面积分, 运算整理后得出确定参数  $w_0$  的三次代数方程为

$$B_0 w_0^3 + B_1 w_0^2 + B_2 w_0 + B_3 = 0 \quad (2.57)$$

式中,  $B_0, B_1, B_2, B_3$  均为线性强化材料给出的方程系数, 分别表示为

$$B_0 = \frac{E_1 A_x}{a^4} + \frac{E_1 A_y}{b^4} \quad (2.58)$$

$$B_1 = 3 \left( \frac{E_1 A_x f_1}{a^4} + \frac{E_1 A_y f_2}{b^4} \right) \quad (2.59)$$

$$B_2 = \frac{9}{5} \left( \frac{H_{x_0}}{a^2} + \frac{H_{y_0}}{b^2} \right) + 2 \left( \frac{E_1 A_x f_1^2}{a^4} + \frac{E_1 A_y f_2^2}{b^4} \right) + \frac{9}{5} \left[ \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left( \frac{\sigma_s E}{E_1} - \sigma_s \right) \right] \quad (2.60)$$

$$B_3 = -\frac{9}{10} \left[ \Delta q - \frac{2f_1}{a^2} \left( \frac{\sigma_s E}{E_1} - \sigma_s \right) + \frac{2f_2}{b^2} \left( \frac{\sigma_s E}{E_1} - \sigma_s \right) \right] \quad (2.61)$$

以上式(2.57)~(2.61)即是用迦辽金法计算线性强化材料鞍形索网的基本公式。在给定材料的物理常数  $E, E_1$ , 给定索网结构的几何参数  $A_x, A_y, f_1, f_2, a, b$  等之后, 由以上各系数公式分别求出  $B_0 \sim B_3$ , 代入式(2.57)求出挠度最大值  $w_0$ , 则可由式(2.50)确定出挠度表达  $w$ 。

相应塑性强化变形时的水平张力公式为

$$H_x = \frac{E_1}{E} H_{x_0} + \left( 1 - \frac{E_1}{E} \right) \sigma_s A_x + \frac{2E_1 A_x}{3a^2} (2f_1 w_0 + w_0^2) \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (2.62)$$

$$H_y = \frac{E_1}{E} H_{y_0} + \left( 1 - \frac{E_1}{E} \right) \sigma_s A_y + \frac{2E_1 A_y}{3b^2} (-2f_2 w_0 + w_0^2) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (2.63)$$

同样, 在  $E_1 = E$  时, 以上内力公式与 2.2 节中弹性变形的索网水平张力表达式相同。

下面用算例说明线性强化鞍形索网的计算过程。

**算例 2.4** 设有椭圆平面的鞍形索网, 椭圆长半轴  $a = 40\text{m}$ , 短半轴  $b = 30\text{m}$ 。索截面积  $A_x = A_y = 5.28\text{cm}^2$ 。承重主索间距  $1\text{m}$ , 稳定副索间距  $1.5\text{m}$ 。设初始状态时索网  $f_1 = 4.2\text{m}$ ,  $f_2 = 2.8\text{m}$ ;  $H_{x_0} = 157\text{kN/m}$ ;  $H_{y_0} = 132\text{kN/m}$ 。材料物理常数  $E = 170\text{kN/mm}^2$ ,  $E_1 = 100\text{kN/mm}^2$ ,  $\sigma_s = 440\text{N/mm}^2$ 。用迦辽金法求索中内力。

**解** 在不计周边圈梁位移, 活载为  $0.7\text{kN/m}^2$  时, 利用索网弹性变形的公式, 求出最大挠度  $w_0 = 0.224\text{m}$ 。此时中央主索的张力达最大值,  $H_x = 232.2\text{kN}$ , 副索张力最大值在边界处为  $H_y = 135\text{kN}$ 。

按材料的屈服极限  $\sigma_s = 440\text{N/mm}^2$  计, 荷载从  $0.7\text{kN/m}^2$  继续提高, 则中央主索开始进入塑性强化变形阶段, 并随荷载增加, 塑性强化变形从中央向两边扩展, 而副索仍处在弹性变形阶段。

如设  $y$  方向从  $0 \sim \pm 15\text{m}$  为塑性强化变形带, 由式(2.57)可以计算出  $w_0$  为  $0.295\text{m}$ , 将这一  $w_0$  值代入式(2.62), 可以计算出主索在  $y$  方向  $0 \sim \pm 15\text{m}$  中任一  $y$  处的索中张力  $H_x$ 。例如取  $y = 0$ , 得中央主索的张力  $H_x = 255\text{kN}$ 。这比中央主索刚进入塑性强化时的  $H_x = 232.2\text{kN}$  大  $22.8\text{kN}$ 。

类似地, 可以计算在其他荷载作用下, 主索呈现任意宽度塑性强化带时的  $w_0$ 。



及  $H_x$  值。

主、副索采用不同材料或不同面积时,本节中推导的线性强化鞍形索网计算公式仍适用。仅将公式中的  $E, E_1$  值或  $A_x, A_y$  加以改变即可。

## 2.5 非线性索网结构的变分解法<sup>1)</sup>

在第一章中,已介绍了具有线性强化特性的悬索的变分问题。本节就线性强化材料组成的索网结构,讨论它的余能和势能表达式并利用最小势能原理求其位移及内力。

线性强化材料的物理关系为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma}{E} & (\sigma \leq \sigma_s) \\ \epsilon &= \frac{\sigma - \sigma_s}{E_1} + \epsilon_s & (\sigma > \sigma_s) \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

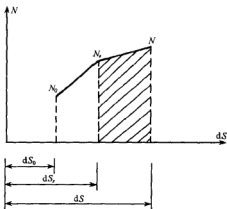


图 2.5 显示了线性强化材料加载过程中索长与张力的关系。

图 2.5 索长与张力关系

第 1.5 节中具有线性强化特性的悬索变分原理可进一步推广到索网结构。这时索网的应变能是  $x$  方向索和  $y$  方向索的应变能总和。如果令  $U_x$  表示  $x$  方向单位宽度索的应变能,则有

$$U_x = \int_{-l_x}^{l_x} (H_x^2 G_x - H_{x_0}^2 J_x + \sigma_x^2 A_x^2 K_x) dx \quad (2.65)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G_x &= \frac{E \sec^3 \theta_{x_0}}{2E_1(EA_x + H_{x_0} \sec \theta_{x_0})} \\ J_x &= \frac{\sec^3 \theta_{x_0}}{2(EA_x + H_{x_0} \sec \theta_{x_0})} \\ K_x &= \frac{(E_1 - E) \sec \theta_{x_0}}{2E_1(EA_x + H_{x_0} \sec \theta_{x_0})} \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

类似地,可以得出  $y$  方向单位宽度上的索应变能  $U_y$  为

$$U_y = \int_{-l_y}^{l_y} (H_y^2 G_y - H_{y_0}^2 J_y + \sigma_y^2 A_y^2 K_y) dy \quad (2.67)$$

其中

1) 贾乃文等, 线性强化材料索网结构的变分解法, 重庆建筑大学学报, 1998 年 5 期

$$\left. \begin{aligned} G_y &= \frac{E \sec^3 \theta_{y_0}}{2E_1(EA_y + H_{y_0} \sec \theta_{y_0})} \\ J_y &= \frac{\sec^3 \theta_{y_0}}{2(EA_y + H_{y_0} \sec \theta_{y_0})} \\ K_y &= \frac{(E_1 - E) \sec \theta_{y_0}}{2E_1(EA_y + H_{y_0} \sec \theta_{y_0})} \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

式中,  $\theta_x$  为  $x$  方向索在  $(x, y)$  点的切线与  $y$  轴之间的夹角;  $\theta_y$  为  $y$  方向索在  $(x, y)$  点的切线与  $x$  轴之间的夹角。

综合  $x$  方向与  $y$  方向的应变能表达, 索网的总应变能为

$$\begin{aligned} U &= \int_{-l_y}^{l_y} \int_{-l_x}^{l_x} (H_x^2 G_x - H_{x_0}^2 J_x + \sigma_i^2 A_x^2 K_x) dx dy \\ &+ \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} (H_y^2 G_y - H_{y_0}^2 J_y + \sigma_i^2 A_y^2 K_y) dx dy \end{aligned} \quad (2.69)$$

外力所做的功  $W$  为

$$W = \int_{-l_y}^{l_y} \int_{-l_x}^{l_x} q(x_0, y_0) (z - z_0) dx dy \quad (2.70)$$

则索网的总势能  $\Pi$  表示为

$$\begin{aligned} \Pi = U - W &= \int_{-l_y}^{l_y} \int_{-l_x}^{l_x} [(H_x^2 G_x - H_{x_0}^2 J_x + \sigma_i^2 A_x^2 K_x) \\ &+ (H_y^2 G_y - H_{y_0}^2 J_y + \sigma_i^2 A_y^2 K_y) - q(x_0, y_0) (z - z_0)] dx dy \end{aligned} \quad (2.71)$$

为了能够应用变分原理对索网结构进行求解, 还需列出相应于任意大小初始垂度及初始张力的索网变形协调方程。其在  $x$  方向和  $y$  方向的变形协调方程为

$$\begin{aligned} 2 \int_{-l_x}^{l_x} (H_x G_x - H_{x_0} J_x + \sigma_i A_x K_x) dx \\ = \int_{-l_x}^{l_x} (\sec \theta_x - \sec \theta_{x_0}) \sec \theta_{x_0} dx \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} 2 \int_{-l_y}^{l_y} (H_y G_y - H_{y_0} J_y + \sigma_i A_y K_y) dy \\ = \int_{-l_y}^{l_y} (\sec \theta_y - \sec \theta_{y_0}) \sec \theta_{y_0} dy \end{aligned} \quad (2.73)$$

以上方程组成了索网结构的变分解法的基本方程组。

利用变分法求索网结构时, 首先假设出一个包含有若干待定系数的索网形状函数  $z^*(a_1, a_2, \dots, a_n, x, y)$ , 然后由变形协调方程求得带有未知系数的  $H_x^*(a_1, a_2, \dots, a_n, x, y)$  和  $H_y^*(a_1, a_2, \dots, a_n, x, y)$ 。接着把  $z^*$ 、 $H_x^*$ 、 $H_y^*$  及外荷载  $q(x, y)$  代入总势能式中得相应的总势能  $\Pi^*(a_1, a_2, \dots, a_n, x, y)$ 。然后根据  $\Pi^*$  取极值即  $\frac{\partial \Pi^*}{\partial a_i} = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 得出  $n$  个代数方程。由此解出  $n$  个待定系数。再代入  $z^*$ 、 $H_x^*$ 、 $H_y^*$

的式中,便得出确定形式的  $z(x, y)$  及  $H_x, H_y$  的值。

**算例 2.5** 图 2.6 为线性强化材料组成的周边铰支的平面为矩形的正交索网结构。设初始状态索网不受外荷载,  $z_0(x, y) = 0$ 。  $x$  方向索的张力水平分量为  $H_x$ , 单位宽度内索网的截面积为  $A_y$ , 类似地, 在  $y$  方向有  $H_y, A_x$ 。用变分方法解这一索网结构。

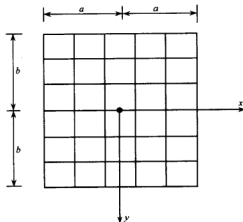


图 2.6 正交索网

**解** 假定索网在加载后,其形状为

$$z^*(x, y) = c(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

其中,  $c$  为待定常数。由变形协调方程知

$$\begin{aligned} H_x^* &= \frac{E_1}{E} H_{x_0} + \left(1 - \frac{E_1}{E}\right) \sigma_1 A_x \\ &\quad + \frac{2}{3} c^2 a^2 (y^2 - b^2)^2 \frac{E_1 (EA_x + H_{x_0})}{E} \\ H_y^* &= \frac{E_1}{E} H_{y_0} + \left(1 - \frac{E_1}{E}\right) \sigma_1 A_y \\ &\quad + \frac{2}{3} c^2 b^2 (x^2 - a^2)^2 \frac{E_1 (EA_y + H_{y_0})}{E} \end{aligned}$$

将  $z^*, H_x^*, H_y^*$  代入总势能表达式,得

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{E}{E_1 (EA_x + H_{x_0})} \left\{ 2ab \left[ \frac{E_1}{E} H_{x_0} - \frac{\sigma_1 A_x (E_1 - E)}{E} \right]^2 \right. \\ &\quad + \frac{64}{45} a^3 b^3 c^2 \frac{E_1 (EA_x + H_{x_0})}{E} \left[ \frac{E_1}{E} H_{x_0} - \frac{\sigma_1 A_x (E_1 - E)}{E} \right] \\ &\quad \left. + \frac{1024}{2835} a^3 b^3 c^4 \frac{E_1^2 (EA_x + H_{x_0})^2}{E^2} \right\} - H_{x_0}^2 \frac{2ab}{(EA_x + H_{x_0})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_i^2 A_x^2 \frac{2ab(E_1 - E)}{E_1(EA_x + H_{x_0})} + \frac{E}{E_1(EA_y + H_{y_0})} \left\{ 2ab \left[ \frac{E_1}{E} H_{y_0} \right. \right. \\
& - \left. \frac{\sigma_i A_y (E_1 - E)}{E} \right]^2 + \frac{64}{45} a^3 b^3 c^2 \frac{E_1 (EA_y + H_{y_0})}{E} \left[ \frac{E_1}{E} H_{y_0} \right. \\
& - \left. \frac{\sigma_i A_y (E_1 - E)}{E} \right] + \frac{1024}{2835} a^9 b^5 c^4 \frac{E_1^2 (EA_y + H_{y_0})^2}{E^2} \left. \right\} \\
& - H_{y_0}^2 \frac{2ab}{(EA_y + H_{y_0})} + \sigma_i^2 A_y^2 \frac{2ab(E_1 - E)}{E_1(EA_y + H_{y_0})} - \frac{16}{9} q c a^3 b^3
\end{aligned}$$

由最小势能原理

$$\delta \Pi^* = 0$$

得出

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{8}{5} b^2 \left[ \frac{E_1}{E} H_{x_0} - \frac{\sigma_i A_x (E_1 - E)}{E} \right] c + \frac{256}{315} a^2 b^6 \frac{E_1 (EA_x + H_{x_0})}{E} c^3 \right\} \\
& + \left\{ \frac{8}{5} a^2 \left[ \frac{E_1}{E} H_{y_0} - \frac{\sigma_i A_y (E_1 - E)}{E} \right] c + \frac{256}{315} a^6 b^2 \frac{E_1 (EA_y + H_{y_0})}{E} c^3 \right\} - q = 0
\end{aligned}$$

经整理后得

$$\begin{aligned}
& \frac{256}{315} \left[ a^2 b^6 \frac{E_1 (EA_x + H_{x_0})}{E} + a^6 b^2 \frac{E_1 (EA_y + H_{y_0})}{E} \right] c^3 \\
& + \frac{8}{5} \left\{ b^2 \left[ \frac{E_1}{E} H_{x_0} - \frac{\sigma_i A_x (E_1 - E)}{E} \right] + a^2 \left[ \frac{E_1}{E} H_{y_0} - \frac{\sigma_i A_y (E_1 - E)}{E} \right] \right\} - q = 0
\end{aligned}$$

通过上式,代入结构计算中的材料常数、几何与荷载参数等,即可解出待定常数  $c$ ,从而求出  $z(x, y)$ 、 $H_x$ 、 $H_y$  等。

现设  $a=10\text{m}$ ,  $b=15\text{m}$ ,  $A_x=150\text{mm}^2/\text{m}$ ,  $A_y=150\text{mm}^2/\text{m}$ ,  $\sigma_i=180\text{N/mm}^2$ ,  $E=170\text{kN/mm}^2$ ,  $E_1=100\text{kN/mm}^2$ ,  $H_{x_0}=180\text{kN/m}$ ,  $H_{y_0}=180\text{kN/m}$ ,  $q=5\text{kN/m}^2$ , 则有关于  $c$  的方程为三次代数方程

$$1.67 \times 10^{13} c^3 + 1.13 \times 10^5 c - 5 = 0$$

利用数值方法解三次代数方程得

$$c = 3.69 \times 10^{-5}$$

则得出位移函数

$$z(x, y) = 3.69 \times 10^{-5} (a^2 - x^2) (b^2 - y^2)$$

索网的最大垂度

$$z_{\max} = z(0, 0) = 0.83\text{m}$$

跨中水平张力为

$$H_x(0, 0) = 286\text{kN/m}$$

$$H_y(0, 0) = 322\text{kN/m}$$

## 2.6 索网结构的塑性强迫振动<sup>1)</sup>

本书第一章中曾对大跨度悬索结构的弹塑性振动问题进行分析,利用摄动法求解了悬索强迫振动的圆频率等。本节进一步分析线性强化材料索网结构的弹塑性振动。

与悬索的振动相比,索网结构的振动分析更为复杂。一般要先做如下假定:

- 1) 索网为一理想的连续的柔性结构,在外力作用下,各索承受拉力。
- 2) 考虑索网的变形是小挠度的,忽略横向位移。
- 3) 所有支座均为固定铰支座。

弹性变形范围的索网振动分析有许多方法,如有限元法等。弹塑性变形范围的索网振动也可以采用有限元法。但有限元法计算工作量大,网格及结构尺寸变化时要重新调整计算程序,不利于工程技术人员的方便应用。当然有限元法也是一种近似方法。

这里介绍一种分离变量方法。设索网底平面的坐标为 $(x, y)$ ,索网结构的自由振动的平衡方程为

$$\Delta H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \Delta H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + H_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.74)$$

式中,  $H_x^0, H_y^0$  分别为  $y, x$  方向单位宽度内索拉力的水平分量初值;  $\Delta H_x, \Delta H_y$  分别为  $x, y$  方向单位宽度内索拉力增量的水平投影;  $m$  为单位面积内的质量;  $w$  为任意时刻结构上任意点的垂度增量;  $z$  为索网结构空间曲面垂度。这一方程是在考虑索网的初始平衡及略去高阶微量基础上而建立的。

在小垂度变形条件下,索长度增量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_x &= - \int_0^{l_x} w \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \\ \Delta l_y &= - \int_0^{l_y} w \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

式中,  $l_x, l_y$  分别为索网在  $x, y$  方向的索长。

在弹性变形时,由索长度增量计算出  $\Delta H_x$  和  $\Delta H_y$ , 分别为

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_x &= - \frac{E_x A_x}{l_x} \int_0^{l_x} w \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \\ \Delta H_y &= - \frac{E_y A_y}{l_y} \int_0^{l_y} w \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

式中,  $A_x, A_y$  分别为  $y, x$  方向单位宽度内索截面积;  $E_x, E_y$  为弹性模量。

现在讨论索网材料是线性强化型的,即索的变形超过弹性范围,进入强化塑性

1) 贾乃文, 线性强化材料索网的振动分析, 力学与实践, 2001年3期

变形时的情况。引入如下的物理关系：

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s)$$

式中各量的含义同 2.5 节。

在塑性强化变形时，索拉力增量的公式应为

$$\Delta H_x = -\frac{E_{1x}A_x}{l_x} \int_0^{l_x} w \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx - \epsilon_s E_{1x} A_x + \sigma_s A_x \quad (2.77)$$

$$\Delta H_y = -\frac{E_{1y}A_y}{l_y} \int_0^{l_y} w \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy - \epsilon_s E_{1y} A_y + \sigma_s A_y \quad (2.78)$$

式中， $E_{1x}$ 、 $E_{1y}$  为  $x$ 、 $y$  方向索在强化阶段的模量，如果索网结构在  $x$ 、 $y$  方向材料相同，则应有  $E_x = E_y$ ， $E_{1x} = E_{1y}$ 。

用分离变量法求解振动方程(2.74)，在索网端部支座为铰支座时，索网的垂度位移  $w$  可取为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} \quad (2.79)$$

式中， $T(t)$  为时间  $t$  的函数。给定矩形底索网空间曲面函数  $z(x, y)$ ，并与式(2.79)中  $w$  一并代入振动方程式(2.74)，可以获得可分离变量的解。

例如取  $z(x, y)$  为常用的曲面：

$$z(x, y) = -\frac{4f_x}{l_x^2} x^2 + \frac{4f_y}{l_y^2} y^2 \quad (2.80)$$

可以求出

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{8f_x}{l_x^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{8f_y}{l_y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

$$\Delta H_x = \left[ -\frac{16E_{1x}A_x f_x}{m\pi l_x^2} \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \sin \frac{n\pi y}{l_y} - \epsilon_s E_{1x} A_x + \sigma_s A_x \right]$$

$$\Delta H_y = \left[ \frac{16E_{1y}A_y f_y}{n\pi l_y^2} \sum_{m=1}^{\infty} T(t) \sin \frac{m\pi x}{l_x} - \epsilon_s E_{1y} A_y + \sigma_s A_y \right]$$

索网的振动方程则为

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{8f_x}{l_x^2} \right) \left[ -\frac{16E_{1x}A_x f_x}{m\pi l_x^2} \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \sin \frac{n\pi y}{l_y} - \epsilon_s E_{1x} A_x + \sigma_s A_x \right] \\ & + \left( \frac{8f_y}{l_y^2} \right) \left[ \frac{16E_{1y}A_y f_y}{n\pi l_y^2} \sum_{m=1}^{\infty} T(t) \sin \frac{m\pi x}{l_x} - \epsilon_s E_{1y} A_y + \sigma_s A_y \right] \\ & - \frac{m^2 \pi^2 H_x^0}{l_x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} - \frac{n^2 \pi^2 H_y^0}{l_y^2} \\ & \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} + m \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T''(t) \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} = 0 \quad (2.82) \end{aligned}$$

将以上各式均写成  $x$ 、 $y$  变量的双重傅里叶级数式，归纳成

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ mT^*(t) + \left( A_m + B_n - \frac{m^2 \pi^2 H_x^0}{l_x^2} - \frac{n^2 \pi^2 H_y^0}{l_y^2} \right) T(t) + C_{mn} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} = 0 \quad (2.83)$$

式中,  $A_m, B_n, C_{mn}$  分别为傅里叶展开式和双重傅里叶展开式的系数, 具体表达为

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} \frac{16E_1 A_x f_x^2}{m\pi l_x^4} \sin \frac{m\pi x}{l_x} dx \\ B_n &= \frac{2}{l_y} \int_0^{l_y} \frac{16E_1 A_y f_y^2}{n\pi l_y^4} \sin \frac{n\pi y}{l_y} dy \\ C_{mn} &= \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[ \frac{8f_x}{l_x^2} (\epsilon_1 E_1 A_x - \sigma_1 A_x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{8f_y}{l_y^2} (\epsilon_1 E_1 A_y - \sigma_1 A_y) \right] \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} dx dy \end{aligned}$$

由式(2.83)可知

$$T^*(t) + \frac{A_m + B_n - \frac{m^2 \pi^2 H_x^0}{l_x^2} - \frac{n^2 \pi^2 H_y^0}{l_y^2}}{m} T(t) + \frac{C_{mn}}{m} = 0 \quad (2.84)$$

这一方程有解为

$$T(t) = A \sin(\omega t + \theta) + c \quad (2.85)$$

式中,  $c, \omega$  分别为与  $m, n$  有关的常数和圆频率, 即

$$\begin{aligned} c &= - \frac{C_{mn}}{A_m + B_n - \frac{m^2 \pi^2 H_x^0}{l_x^2} - \frac{n^2 \pi^2 H_y^0}{l_y^2}} \\ \omega &= \left[ \frac{A_m + B_n - \frac{m^2 \pi^2 H_x^0}{l_x^2} - \frac{n^2 \pi^2 H_y^0}{l_y^2}}{m} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

式(2.86)即为索网结构振动的圆频率。

式(2.85)的表达与 1.6 节相同, 在  $c=0$  即转化为弹性索网的振动解。

线性强化材料索网结构的弹塑性振动解为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A \sin(\omega t + \theta) + c] \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} \quad (2.87)$$

对于矩形底的其他索网曲面  $z$  函数, 可类似地求出其振动圆频率及振动解。

以上各式中, 令  $E_1 = E, \sigma_1 = E\epsilon_1$ , 则简化成索网弹性强迫振动的解, 这里不再单独对此推求。

索网振动计算是一个非常复杂的数学问题。这里再介绍一种差分近似解法。

二维坐标下, 索网振动的基本方程为

$$H_x \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + H_y \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} = \frac{q}{g} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} \quad (2.88)$$

其初始条件和边界条件分别为

$$\left. \begin{aligned} \delta(x, y, 0) &= 0 \\ \delta(x_1, y_1, t) &= 0 \quad [(x_1, y_1) \text{ 点在边界上}] \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

可取振动形式为上弦曲线,即

$$\delta = f(x, y) \sin \omega t \quad (2.90)$$

此式显然满足初始条件。将式(2.90)代入平衡方程和边界条件,则有

$$\left. \begin{aligned} H_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + H_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left( \frac{q}{g} \omega^2 \right) f &= 0 \\ f(x_1, y_1) &= 0 \quad [(x_1, y_1) \text{ 点在边界上}] \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

问题化为求式(2.91)的 $\omega$ 的最小特征值。为了估计 $\omega$ 的近似值,可取 $H_x, H_y$ 的近似表达式。用差分法表达微分时,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\Delta}{\Delta x} \left[ \frac{1}{\Delta x} (f_i - f_{i-1}) \right] \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}] \end{aligned}$$

式(2.91)的差分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_x(i, j)}{(\Delta x)^2} [f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}] + \frac{H_y(i, j)}{(\Delta y)^2} [f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}] + \left( \frac{q}{g} \omega^2 \right) f_{i,j} &= 0 \\ f_{k,l} &= 0 \quad (\text{在边界上}) \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

再代入 $\delta$ 的表达式,可求出圆频率 $\omega$ 之值。

**算例 2.6** 平面底为矩形的鞍形正交索网,周边铰支条件,边长为 $40\text{m} \times 60\text{m}$ ,受有 $q=1.5\text{kN/m}^2$ 的荷载。求振动的圆频率 $\omega$ 。

**解** 将其划分为9个矩形网格,如图2.7所示。

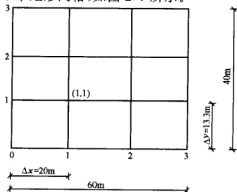


图 2.7 索网振动平面



$$\Delta x = 20\text{m} \quad \Delta y = 13.3\text{m}$$

由于  $q=1.5\text{kN/m}^2, g=9.81\text{m/s}^2$ , 得

$$\frac{q}{g} = 0.153\text{kN/m}^3$$

由差分法求得(方法从略)

$$H_{x(1,1)} = 75\text{kN/m}$$

$$H_{y(1,1)} = 232\text{kN/m}$$

将  $(\Delta x)^2=400\text{m}^2$   $(\Delta y)^2=176.89\text{m}^2$  代入式(2.83)有

$$\frac{75}{400}(-f_{1,1}) + \frac{232}{176.89}(-f_{1,1}) + 0.153\omega^2 f_{1,1} = 0$$

解出  $\omega$  为 3.12, 自振周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\text{s}$$

## 第三章 非线性平板网架结构

### 3.1 平板网架的差分计算

平面桁架系网架是平板网架结构中比较简单、比较常用的一种网架。它由纵横多榀桁架联接而成,每榀桁架一般采用同一型式,就桁架联接型式又可分正交正放和正交斜放等。正交正放指纵横桁架彼此正交联接,并与边界正交放置;正交斜放指纵横桁架彼此正交联接,但与边界呈某一角度放置。

平板网架计算常用有限差分法,因为规则的网架分格与差分格式吻合,计算方便,误差较小。

设有一个单变量函数  $F$ ,并表示成

$$F = F(x) \quad (3.1)$$

如果将函数  $F$  对  $x$  的导数表示成

$$\frac{dF}{dx} \approx \frac{\Delta F}{\Delta x} \approx \frac{F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.2)$$

则导数可按差分公式近似计算。随着  $\Delta x$  减小,式(3.2)这一近似值愈加精确。利用式(3.2)往往能将微分方程式化为代数方程式。

一般地,差分公式有向前差分和向后差分表达式,分别为

$$\frac{dF}{dx} \approx \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad (3.3)$$

$$\frac{dF}{dx} \approx \frac{F(x) - F(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.4)$$

相应的二阶导数的差分公式为

$$\frac{d^2F}{dx^2} \approx \frac{F(x + \Delta x) - 2F(x) + F(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (3.5)$$

或者写成

$$\frac{d^2F}{dx^2} \approx \frac{1}{4(\Delta x)^2} [F(x + 2\Delta x) - 2F(x) + F(x - 2\Delta x)] \quad (3.6)$$

在三维空间有两个变量函数情况下,各种差分公式可类似地写出。设有函数  $w$ ,并有

$$w = w(x, y) \quad (3.7)$$

一阶导数写成差分公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} [w(x + \Delta x, y) - w(x - \Delta x, y)] \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta y} [w(x, y + \Delta y) - w(x, y - \Delta y)] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

二阶导数写成差分公式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [w(x + \Delta x, y) - 2w(x, y) + w(x - \Delta x, y)] \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{1}{(\Delta y)^2} [w(x, y + \Delta y) - 2w(x, y) + w(x, y - \Delta y)] \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

如此等等。利用以上公式可以将偏微分方程化为代数方程。

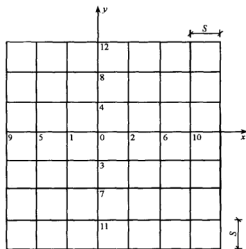


图 3.1 正交正放网架网格

图 3.1 所示为平面桁架系网架平面网格划分。假设网架梁结构中的每片桁架刚度相等,其惯性矩为

$$I = \frac{A_a A_b}{A_a + A_b} \times h \quad (3.10)$$

式中,  $A_a$ 、 $A_b$  分别为桁架上、下弦截面积;  $h$  为网架高度。

如果设  $q$  为单位面积上均布荷载,  $S$  为网格间距, 则两向正交网架梁的挠度与荷载关系为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{qS}{EI} \quad (3.11)$$

按图 3.1 中的网格编号, 并令  $\Delta x = \Delta y = S$ , 则差分公式在 0 点表达为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{12w_0 - 4(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + w_5 + w_6 + w_7 + w_8}{S^4} \\ &= \frac{qS}{EI} \end{aligned}$$

从而有 0 点挠度差分公式

$$12w_0 - 4(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + w_5 + w_6 + w_7 + w_8 = \frac{qS^5}{EI} \quad (3.12)$$

类似地,可以写出各网格点的挠度差分方程。

用差分法求网格梁的挠度,先将网架平面按图(3.1)方法画出各节点的编号,然后对每节点列出与式(3.12)相类似的差分方程,因为方程式数与节点数是相同的,解此代数方程组可求得各节点挠度。

在节点挠度求出之后,仍然可用差分公式求出节点内力。

按弯矩与挠度的关系写出中心点的弯矩为

$$M_x = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx -EI \frac{w_1 - 2w_0 + w_2}{S^2} \quad (3.13)$$

$$M_y = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx -EI \frac{w_3 - 2w_0 + w_4}{S^2} \quad (3.14)$$

类似地,可以写出其余各点的弯矩公式。

再由剪力与挠度关系求出中心点剪力差分公式:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ V_x^{\bar{x}} &= V_x^{0-1} = EI \frac{w_2 - 3w_0 + 3w_1 - w_5}{S^3} \\ V_x^{\bar{x}} &= V_x^{0-2} = EI \frac{w_6 - 3w_2 + 3w_0 - w_1}{S^3} \\ V_x^0 &= V_x^{\bar{x}} - V_x^{\bar{x}} = EI \frac{6w_0 - 4(w_1 + w_2) + w_5 + w_6}{S^3} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

同理得出

$$\left. \begin{aligned} V_y &= -EI \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\ V_y^0 &= EI \frac{6w_0 - 4(w_3 + w_4) + w_7 + w_8}{S^3} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

如果节点有集中荷载,并且集中荷载为  $P$ ,则有

$$P = V_x + V_y \quad (3.17)$$

类似地,可以写出其余各点的剪力差分公式。

对于正交斜放网架,两向网格梁之间不垂直,有  $\alpha$  夹角,那么在以上挠度差分公式中的等号右边乘  $\sin\alpha$ ,即  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{qS}{EI} \sin\alpha$ ,可类似地求解。

用差分法求网格梁的挠度,对边界各点要列出边界条件,对图 3.1 所示正交网格梁的铰支边,有边界上的挠度为零和法向弯矩为零,表达成

$$\begin{aligned} w_{(x,y)} &= 0 \\ w_{(x+\Delta x,y)} - 2w_{(x,y)} + w_{(x-\Delta x,y)} &= 0 \end{aligned}$$

也即对边界点 $(x, y)$ 处有

$$\left. \begin{aligned} w_{(x,y)} &= 0 \\ w_{(x+\Delta x,y)} &= -w_{(x-\Delta x,y)} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

对固支边界,有边界挠度等于零和法向转角为零,表达成

$$\left. \begin{aligned} w_{(x,y)} &= 0 \\ w_{(x+\Delta x,y)} - w_{(x-\Delta x,y)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

对自由边界,有边界法向弯矩等于零和外侧剪力等于零,表达成

$$\left. \begin{aligned} w_{(x-\Delta x,y)} &= 2w_{(x,y)} - w_{(x+\Delta x,y)} \\ w_{(x-2\Delta x,y)} &= 3w_{(x,y)} - 2w_{(x+\Delta x,y)} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

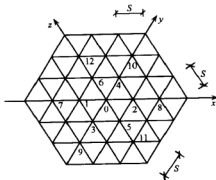


图 3.2 三向交叉网架

还有一种三向交叉网格梁组成的平面网架,如图 3.2 所示。它的偏微分方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = \frac{qS}{EI} \sin 60^\circ \quad (3.21)$$

式中, $x, y, z$  为非正交的平面交叉梁坐标。用类似方法推导式(3.21)的差分可得出三向网架的差分公式(中心点):

$$\begin{aligned} 18w_0 - 4(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) + w_7 + w_8 + w_9 + w_{10} + w_{11} \\ + w_{12} = \frac{qS}{EI} \sin 60^\circ \end{aligned} \quad (3.22)$$

类似地,可以写出其余各点的差分方程。

弯矩的差分表达为

$$\left. \begin{aligned} M_x^0 &= -EI \frac{w_1 - 2w_0 + w_2}{S^2} \\ M_y^0 &= -EI \frac{w_3 - 2w_0 + w_4}{S^2} \\ M_z^0 &= -EI \frac{w_5 - 2w_0 + w_6}{S^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

剪力的差分公式为

$$\left. \begin{aligned} V_x^0 &= EI \frac{6w_0 - 4(w_1 + w_2) + w_7 + w_8}{S^3} \\ V_y^0 &= EI \frac{6w_0 - 4(w_3 + w_4) + w_9 + w_{10}}{S^3} \\ V_z^0 &= EI \frac{6w_0 - 4(w_5 + w_6) + w_{11} + w_{12}}{S^3} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

按着正交正放的差分边界条件式(3.18)~(3.20),可以类似地写出正交斜放以及三向交叉网架梁分别在简支、固支和自由边界下的差分表达式。

**算例 3.1** 图 3.3 为某大厅的两向正交桁架梁系网架。平面尺寸为  $30\text{m} \times 30\text{m}$ , 四边铰支, 桁架采用钢管制成。如果屋面荷载(包括自重)为  $q=1.5\text{kN/m}^2$ , 由于对称性, 可仅计算网架的  $1/4$  部分, 即图中从 1~6 节点。用差分法解此网架内力。

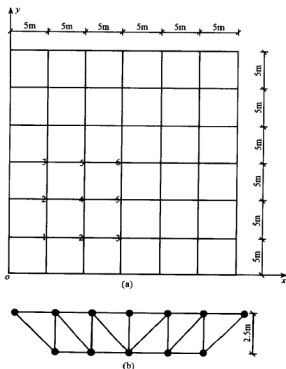


图 3.3 网架平面

**解** 选定网架中  $\Delta x = \Delta y = S = 5\text{m}$ , 梁高  $h = 2.5\text{m}$ , 由于简支周边节点挠度为零, 按式(3.12), 为简单计, 再令  $\frac{qS^5}{EI} = 1$ , 可以列出 6 个节点的差分方程为

$$\text{节点 1: } 10w_1 - 8w_2 + 2w_3 = 1$$

$$\text{节点 2: } -4w_1 + 12w_2 - 4w_3 - 4w_4 + w_5 = 1$$

$$\text{节点 3: } 2w_1 - 8w_2 - 11w_3 - 4w_5 + w_6 = 1$$

$$\text{节点 4: } -8w_2 + 14w_4 - 8w_5 = 1$$

$$\text{节点 5: } 2w_2 - 4w_3 - 8w_4 + 13w_5 - 4w_6 = 1$$

$$\text{节点 6: } 4w_3 - 16w_5 + 12w_6 = 1$$

解以上方程组,可以得出节点挠度系数  $w_i$ ,再乘以  $\frac{qS^5}{EI}$  得各点的挠度。

相应的各点的弯矩为

$$M_i = -EI \times \frac{W_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{S^2} \frac{qS^5}{EI} = (-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1})qS^3 \\ = m_i qS^3$$

各点的剪力为

$$V_{i,i-1} = \frac{M_i - M_{i-1}}{S} = (m_i - m_{i-1})qS^2$$

由此求得网架杆件内力为

$$\text{上弦杆: } N_i = -\frac{M_i}{h} = -m_i \frac{qS^3}{h}$$

$$\text{下弦杆: } N_i' = -\frac{M_{i-1}}{h} = m_{i-1} \frac{qS^3}{h}$$

$$\text{斜杆内力: } N_i^* = \frac{V_{i,i-1}}{\sin \alpha} = (m_i - m_{i-1})qS^2 \sqrt{1 + \left(\frac{S}{h}\right)^2}$$

$$\text{竖杆内力: } N_i^0 = -\sum_i N_i^* \sin \alpha = -\sum_i (m_i - m_{i-1})qS^2$$

式中,  $\alpha$  为斜腹杆与水平杆交角。

由给出条件计算出

$$\frac{qS^3}{h} = 75$$

$$qS^2 = 37.5$$

$$qS^2 \sqrt{1 + \left(\frac{S}{h}\right)^2} = 83.85$$

得出的各杆内力如图 3.4 所示。

另一种常用的平板网架是四角锥网架,它又分为正放四角锥和斜放四角锥两种类型。四角锥的基本形式如图 3.5(a)所示,它由众多的四角锥组合成网架。

图 3.5(b)给出正交斜放四角锥网架的局部样图。对它的  $2i, 2j$  代表性下弦节点进行差分计算。

一般可用假想弯矩法进行四角锥网架分析。

根据网架梁的弯矩与外荷载关系式,有

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (3.25)$$

式中,  $q$  为网架承受的荷载。





在  $S_x = S_y = S$  时, 有  $M_x = M_y$ , 形成节点弯矩表示的差分代数方程:

$$M_{2(i+1),2j} + M_{2(i-1),2j} + M_{2i,2(j-1)} + M_{2i,2(j+1)} - 4M_{2i,2j} = -S^2 q \quad (3.28)$$

将式(3.28)中的均布荷载  $q$  用节点荷载表示, 即按图 3.5 中的各上、下弦节点集中力表达, 有

$$q = \frac{4P_2 + P_1}{S} \quad (3.29)$$

对于四角锥网架最常见的简支边界, 上弦节点处在边界时, 按边界处弯矩为零考虑, 下弦对应边界外开拓点的假想弯矩与边界内的弯矩反对称, 在  $y$  方向可表示为

$$M_{-2,2j} = -M_{2,2j}$$

代入式(3.28)后得出规律性边界点差分式:

$$M_{2,2(j+1)} + M_{4,2j} + M_{2,2(j-1)} - 5M_{2,2j} = -S(P_1 + 4P_2) \quad (3.30)$$

在角偶处, 如上弦在中心原点处的下弦节点, 可令上式中  $j=1$ , 求出差分式

$$M_{2,4} + M_{4,2} - 6M_{2,2} = -S(P_1 + 4P_2)$$

在求出下弦各节点的弯矩之后, 下弦杆的轴力按每根杆两端节点处的弯矩求得, 对  $k-j$  节点的下弦杆, 轴力  $N_{k,j}$  为

$$N_{k,j} = \frac{M_k + M_j}{2h} \quad (3.31)$$

式中,  $h$  表示网架高度。

相邻节点间的剪力  $V_{k,j}$  为

$$V_{k,j} = \frac{M_k - M_j}{S} \quad (3.32)$$

两节点间由斜腹杆承担结构的剪力, 斜腹杆的轴力  $\bar{N}_{k,j}$  为

$$\bar{N}_{k,j} = (P_2 - V_{k,j}) / \sin \alpha_1 \quad (3.33)$$

式中,  $\alpha_1$  为斜腹杆与一个方向水平线的夹角。如果斜腹杆在两个方向与水平线的夹角相同, 在计算另一方向斜腹杆轴力时, 仍可用上述公式。 $\alpha_1$  的表达如图 3.5 所示。

上弦杆内力在同一单元锥体中, 按节点的内力平衡可知是四杆相等的, 而由截面法可以求出  $k-j$  跨间的上弦杆轴力  $N'$  为

$$N'_{k,j} = \frac{1}{2\cos\nu} \left[ N_{k,j} - (P_2 - V_{k,j}) \frac{S}{h} \right] \quad (3.34)$$

式中,  $\nu$  如图 3.5(b) 所示, 为上弦杆与下弦杆间的平面夹角, 在  $S_x = S_y$  时,  $\nu = 45^\circ$ 。

下面给出计算挠度的差分表达。

由挠度  $w$  与弯矩的关系, 有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_x + M_y}{EI} \quad (3.35)$$

引入挠度的二阶差分表达式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{2(i-1),2j} + w_{2(i+1),2j} - 2w_{2i,2j}}{S_x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{2i,2(j-1)} + w_{2i,2(j+1)} - 2w_{2i,2j}}{S_y^2}$$

在  $S_x = S_y, M_x = M_y$  条件下, 差分表达的挠度代数一般方程为

$$w_{2(i-1),2j} + w_{2(i+1),2j} + w_{2i,2(j-1)} + w_{2i,2(j+1)} - 4w_{2i,2j} = \frac{2M_{2i,2j}}{EI} S^2 \quad (3.36)$$

式中,  $I$  为折算惯性矩, 其值为

$$I = \frac{A_+ A_-}{A_+ + A_-} h^2$$

其中,  $A_+$  和  $A_-$  为折算面积, 即

$$A_+ = \frac{2A_1 \cos^2 \nu}{l_1} S$$

$$A_- = \frac{A_2 S}{l_2}$$

式中,  $A_1, A_2$  为上下弦杆的截面积;  $l_1, l_2$  为上下弦杆的长度。

这里还应指出,  $P_1$  为下弦节点荷载, 它一般指下弦吊顶等荷载及网架自重的一半, 其受荷面积为  $S^2$ ; 而  $P_2$  为单元锥体的上弦节点的  $1/4$  个集中荷载, 它包括屋面荷载及网架自重的一半, 其受荷面积  $4P_2$  为  $S^2$ 。

以下用算例说明四角锥网架的计算过程, 并同相同尺寸的桁架梁比较总内力大小, 以便分析两种形式网架的经济效益。

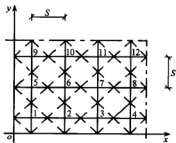


图 3.6 斜放四角锥网架

**算例 3.2** 图 3.6 为某大厅斜放四角锥网架, 按长 40m、宽 30m 的整体尺寸, 取下弦间距  $S=5\text{m}$  的  $1/4$  部分将下弦节点编号进行计算。图 3.6 中实线及数字为下弦及节点; 虚线为上弦杆件。网架高  $h=2.5\text{m}$ , 无缝钢管材料  $E=21 \times 10^3 \text{kN/cm}^2$ 。另设屋面活载为  $1.5 \text{kN/m}^2$ , 网架自重取  $1 \text{kN/m}^2$ , 下弦有吊顶荷载等  $0.5 \text{kN/m}^2$  (以上计入荷载系数)。计算各杆内力。

**解** 按假想弯矩法, 在纵向、横向均取  $S=5\text{m}$  时, 各点均有  $M_x = M_y$ 。先取  $-S(P_1 + 4P_2) = -1$ , 可以列出各点弯矩系数的差分公式为

$$m_2 + m_5 - 6m_1 = -1$$

$$m_1 + m_3 + m_6 - 5m_2 = -1$$

$$m_2 + m_4 + m_7 - 5m_3 = -1$$

$$m_3 + m_8 + m_4 - 5m_4 = -1$$

$$m_1 + m_6 + m_9 - 5m_5 = -1$$

$$m_2 + m_5 + m_7 + m_{10} - 4m_6 = -1$$

$$m_3 + m_6 + m_8 + m_{11} - 4m_7 = -1$$

$$m_4 + m_7 + m_{12} - 3m_8 = -1$$

$$m_5 + m_9 + m_{10} - 5m_9 = -1$$

$$m_6 + m_9 + m_{11} + m_{10} - 4m_{10} = -1$$

$$m_7 + m_{10} + m_{12} + m_{11} - 4m_{11} = -1$$

$$m_8 + m_{11} + 2m_{12} - 4m_{12} = -1$$

解此代数方程组, 计入上弦节点荷载  $P_2$  与下弦节点荷载  $P_1$  分别是

$$P_2 = \frac{1}{2} \times (1.5 + 0.5) \times (2.5\sqrt{2})^2 = 12.5 \text{ kN}$$

$$P_1 = (0.5 + 0.5) \times 5^2 = 25 \text{ kN}$$

求出  $S(P_1 + 4P_2)$  之后, 与假想弯矩系数相乘, 得出各节点弯矩为

$$M_1 = 172.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_2 = 331.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = 410.1 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_4 = 443.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_5 = 327.9 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_6 = 700.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_7 = 900.8 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_8 = 988.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_9 = 392.1 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{10} = 865.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{11} = 1129.2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{12} = 1246.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由以上下弦节点弯矩, 再利用本节中的有关计算公式, 可以依次求出四角锥网架下弦杆、斜腹杆以及上弦杆的轴力。这里仅以 7 节点为例说明这些杆件的计算过程。

下弦杆内力:

$$N_{3-7} = \frac{1}{2h}(M_3 + M_7) = 262.21 \text{ kN}$$

$$N_{6-7} = \frac{1}{2h}(M_6 + M_7) = 320.20 \text{ kN}$$

$$N_{7-8} = \frac{1}{2h}(M_7 + M_8) = 377.90 \text{ kN}$$

$$N_{7-11} = \frac{1}{2h}(M_7 + M_{11}) = 406.00 \text{ kN}$$

斜腹杆内力:

上弦各节点剪力:

$$V_{7-3} = \frac{1}{S}(M_7 - M_3) = 98.1 \text{ kN}(+)$$

$$V_{7-11} = \frac{1}{S}(M_7 - M_{11}) = 45.7 \text{ kN}(-)$$

$$V_{7-6} = \frac{1}{S}(M_7 - M_6) = 40.1 \text{ kN}(+)$$

$$V_{7.8} = \frac{1}{S}(M_7 - M_8) = 17.5 \text{ kN}(-)$$

由  $P_2 = 12.5 \text{ kN}$ , 腹杆倾角为  $45^\circ$ , 按腹杆内力公式可求出

$$S_{7.3} = (P_2 - V_{7.3})/\sin 45^\circ = 121.1 \text{ kN}(-) \quad S_{7.11} = 82.31 \text{ kN}(-)$$

$$S_{7.6} = 39.0 \text{ kN}(-) \quad S_{7.8} = 42.43 \text{ kN}(-)$$

上弦杆内力:

由公式

$$N_{kt} = \frac{1}{2\cos 45^\circ} \left[ N_{kt} - (P_2 - V_{kt}) \frac{S}{2h} \right]$$

得出

$$N'_{7.3} = N'_{7.11} = N'_{7.6} = N'_{7.8} = 246 \text{ kN}(-)$$

将四角锥网架与桁架梁式网架内力进行比较是有参考意义的。选择四角锥网架在 7 节点的总内力, 即上弦、下弦、斜腹杆总内力为

$$\text{四角锥 7 节点总内力} = 1460 \text{ kN}$$

现计算和设计相同尺寸的网架。采用桁架梁式, 网架间距  $S = 5 \text{ m}$ , 网架高  $h = 2.5 \text{ m}$ , 承受相同的荷载, 与四角锥 7 节点相同部分的桁架梁的上弦、下弦、斜腹杆及竖杆的总内力为

$$\text{桁架梁该处总内力} = 1658 \text{ kN}$$

显然, 桁架梁式网架的材料要用得多一些, 结构整体用料将会更多。

## 3.2 平板网架的拟板计算

对于平板网架的设计与计算方法, 3.1 节给出的差分法是一种离散化的数值方法, 这对网格尺寸均匀、边界整齐的结构来说, 计算是方便的。

下面介绍平板网架设计与计算的另一种方法——拟板法, 这是一种连续化的计算方法。在网架的网格比较密时, 将平板网架假想成一块连续的薄板, 应用薄板理论对其进行内力分析。为便于理解拟板法, 这里先用直角坐标分析薄板。

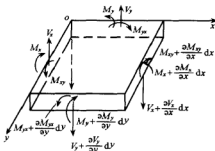


图 3.7 薄板的弯矩及剪力

用  $w$  表示薄板的挠度, 在薄板受有外荷载时, 板内会有弯矩和剪力。如果板仅限于承受法向荷载时, 板内的轴力可以忽略。我们可以用挠度表示弯矩和剪力, 再由平衡关系最后获得薄板的挠度公式。

图 3.7 为薄板的弯矩及剪力分析, 在板受竖向分布荷载  $q$  作用时, 可以建立如下力矩平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - V_y &= 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

由式(3.37)中的前两式分别求出  $V_x$  及  $V_y$ , 代入第三式, 并计入互等条件  $M_{xy} =$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (3.38)$$

考虑断面上的应力  $M_x = \int_0^h \sigma_x z dz$ , 计入  $\epsilon_x = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , 以及利用胡克定律, 可以得出挠度与内力关系为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) & M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & V_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ V_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

式中,  $\mu$  为泊松比;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ,  $h$  为板厚。将式(3.38)用  $w$  表示, 则有

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

或

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} \quad (3.40)$$

在直角坐标下, 算子  $\nabla$  表示为

$$\nabla^2() = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2}$$

在极坐标下,

$$\nabla^2() = \frac{\partial^2()}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial()}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2()}{\partial \theta^2}$$

用拟板法计算平板网架时假定:

1) 将网架的上下弦杆看成板的上下表面, 网架高度为板厚, 上下弦杆承受

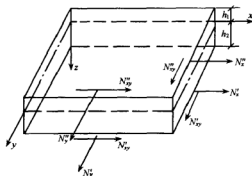


图 3.8 薄板内力

$$\{N'\} = [D']\{\epsilon'\} \quad (3.41)$$

$$\{N''\} = [D'']\{\epsilon''\} \quad (3.42)$$

式中,  $[D']$ 、 $[D'']$ 分别为上、下表层刚度矩阵,按内力为  $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$ ,应变为  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\nu_{xy}$ 取值的话,它们分别是  $3 \times 3$  阶的对称矩阵。

用  $D'_{11}$ 、 $D'_{11}$ 表示下、上表层在  $x$  方向发生单位应变所引起的  $x$  方向内力;  $D'_{12}$ 、 $D'_{12}$ 表示下、上表层在  $x$  方向发生单位应变所引起的  $y$  方向内力;  $D'_{13}$ 、 $D'_{13}$ 表示下、上表层在  $x$  方向发生单位应变所引起的表层内剪力。

类似地,有关于  $y$  方向的分量  $D'_{22}$ 、 $D'_{22}$ 、 $D'_{21}$ 、 $D'_{21}$ 、 $D'_{23}$ 、 $D'_{23}$ ,以及剪切混合分量  $D'_{31}$ 、 $D'_{31}$ 、 $D'_{32}$ 、 $D'_{32}$ 等。

这些刚度系数的具体表达是:设网架的弦杆网格由  $n$  个不同方向的杆件组成,它们与  $x$  轴夹角为  $\alpha$ ,平行杆件的垂直间距为  $a$ ,杆件面积为  $A$ ,则杆件的原有刚度为

$$K_{ii} = \frac{EA_i}{a_i} \quad K_{ij} = 0 (i \neq j) \quad (3.43)$$

坐标转换矩阵为

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_n & \sin^2 \alpha_n & \cos \alpha_n \sin \alpha_n \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

在网架上、下弦杆各方向间距、面积均相同时,得出刚度矩阵为

$$[D'] = \frac{EA'}{a'} [C']^T [C'] \quad (3.45)$$

$$[D''] = \frac{EA''}{a''} [C'']^T [C''] \quad (3.46)$$

在直角坐标  $x, y, z$  表示的网架中, 用  $u, v, w$  表示中面上任一点沿  $x, y, z$  方向位移, 下表层的应变为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon'_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \nu'_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

综合成矩阵式为

$$\{\epsilon'\} = \{\epsilon\} - h_2 \{\mathcal{C}\} \quad (3.48)$$

类似地, 有上层应变式

$$\{\epsilon''\} = \{\epsilon\} + h_1 \{\mathcal{C}\} \quad (3.49)$$

列阵  $\{\mathcal{C}\}$  为

$$\{\mathcal{C}\} = \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (3.50)$$

内力矩阵为

$$\{N'\} = [D']\{\epsilon\} - h_2[D']\{\mathcal{C}\} \quad (3.51)$$

$$\{N''\} = [D'']\{\epsilon\} + h_1[D'']\{\mathcal{C}\} \quad (3.52)$$

板的中面内力为

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N'_x + N''_x \\ N_y &= N'_y + N''_y \\ N_{xy} &= N'_{xy} + N''_{xy} \\ M_x &= N'_x h_2 - N''_x h_1 \\ M_y &= N'_y h_2 - N''_y h_1 \\ M_{xy} &= N'_{xy} h_2 - N''_{xy} h_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

将板的弯矩内力与薄膜内力写成矩阵式, 则有上、下弦杆走向 ( $\alpha$  角) 一样时的表达:

$$\left. \begin{aligned} \{M\} &= [B]\{\mathcal{C}\} \\ [B] &= h_2^2[D'] + h_1^2[D''] \\ \{N\} &= [D']\{\epsilon\} + [D'']\{\epsilon\} \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

在正交正放、两向正交斜放、两向斜交斜放和三向类网架中, 由于这些网架上、下弦杆走向一样, 拟板法的微分方程在板内力微分方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

基础上改为

$$b_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4b_{31} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(b_{21} + 2b_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$+ 4b_{32} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + b_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (3.55)$$

式中

$$b_{ij} = h_2^2 D'_{ij} + h_1^2 D''_{ij}$$

下面,分几种情况说明这一方程的具体表达。

### (1) 正交正放网架

由于网架间距取常数  $a$ , 所以有

$$D'_{11} = D'_{22} = \frac{EA_2}{a}$$

$$D''_{11} = D''_{22} = \frac{EA_1}{a}$$

式中,  $A_1$ 、 $A_2$  分别为上、下弦杆截面积。

$$b_{11} = b_{22} = \frac{E}{a} (A_1 h_1^2 + A_2 h_2^2)$$

$$h = h_1 + h_2$$

$$b_{11} = b_{22} = \frac{EI}{a} \quad I = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} h^2$$

网架的微分方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

$$D = \frac{EI}{a}$$

内力则有

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad M_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad M_{xy} = 0$$

$$V_x = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad V_y = -D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$$

这一结果对正放四角锥网架也是适用的,对抽空的四角锥网架,仅将  $I$  改为

$$I = \frac{A_1 A_2}{2A_1 + A_2} h^2$$

即可进行同样的运算。

### (2) 正交斜放网架

当  $\alpha = 45^\circ$  时,按计算得

$$b_{31} = b_{32} = 0$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{21} = \frac{EI}{2a}$$

$$I = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} h^2$$



网架的微分方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{B}$$

$$B = \frac{EI}{2a}$$

内力为

$$M_x = -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -2B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$V_x = -B \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$V_y = -B \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)$$

沿杆件的轴向弯矩分别是

$$M_{n1} = a(M_x + M_{xy})$$

$$M_{n2} = a(M_y - M_{xy})$$

### (3) 三向类网架

这类网架包括三向网架、三角锥网架、抽空三角锥网架等。上、下弦间距取为  $a$  (抽空的下弦为  $2a$ )。

由此求出

$$b_{31} = b_{32} = 0 \quad b_{11} = b_{22} = \frac{9EI}{8a} \quad b_{21} = b_{33} = \frac{3EI}{8a}$$

$$I = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} h^2$$

$$I = \frac{A_1 A_2}{2A_1 + A_2} h^2 \text{ (抽空三角锥)}$$

网架基本微分方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{B}$$

$$B = \frac{9EI}{8a}$$

内力表达为

$$M_x = -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -B \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{xy} = -\frac{2B}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$V_x = -B \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$V_y = -B \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)$$

这一坐标表达如图 3.9 所示。

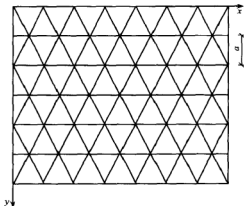


图 3.9 三向网架

#### (4) 斜放四角锥网架

斜放四角锥网架也可用拟板法表达,但方程表达比较复杂,这里不再赘述。

拟板法的微分方程可用级数法求解。对于周边支承网架,可采用双三角级数,类似于板的弯曲问题的求解方法结合边界条件确定各内力。

在板的挠度、弯矩及剪力求出后,再根据平衡条件求出各上、下弦及腹杆杆件轴力,进行杆件结构设计。

### 3.3 网架结构的非线性分析

3.2 节给出了网架拟板法的线弹性分析,本节讨论网架结构弹塑性变形的非线性问题。

目前平板网架的设计与计算仅限于弹性范围,尤其桁架梁式网架的上、下弦杆在全区间不做截面变化,这样的结构设计是不合理的。如果网架在制作及吊装等环节中或在使用过程中,某些外在因素导致最大受力杆件超出弹性极限,那么整个网架的杆件内力与弹性计算不相吻合。所以计入材料的弹塑性应力-应变关系,在网架的设计与计算中进行弹塑性分析是十分重要的。

现在考虑网架上、下弦杆件是具有塑性强化特性的情况,其物理关系如图

3.10 所示,公式表达为

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & (\epsilon < \epsilon_s) \\ \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s) & (\epsilon \geq \epsilon_s) \end{cases} \quad (3.56)$$

在网架弯矩较大的区域,材料进入塑性强化阶段,用式(3.56)第二式。在其余弯矩较小区域,材料处于弹性变形阶段,用式(3.56)第一式分别进行设计计算。

在外荷载  $q$  作用下,板弯曲的一般方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= V_x \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= V_y \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

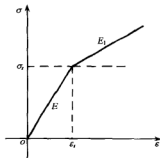


图 3.10 线性强化材料的  $\sigma$ - $\epsilon$  图

形成弯矩表达的平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (3.58)$$

在网架拟板法中,这一基本方程无论在弹性还是塑性变形下都是成立的。由于拟板法中各类网架的弯矩与挠度间是二次微分关系,由此形成关于挠度的四阶微分表达的平衡方程。例如对正交正放类网架,有

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad M_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad M_{xy} = 0$$

$$D = \frac{EI}{S}$$

方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (3.59)$$

式中,  $S$  为网架桁架梁间距。

如果材料是弹塑性的,既有弹性变形又有塑性强化变形。按拟板法的分析,网架弯矩主要由上、下弦杆承担,在弹性变形时,杆件的应力为

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.60)$$

由此应力组成的弯矩在上、下弦杆面积相同时为

$$M = \sigma Ah = E\epsilon Ah \quad (3.61)$$

式中,  $h$  为网架高度;  $\epsilon$  则是挠度的二阶导数式与板高度坐标  $z$  的乘积。

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.62)$$

在塑性强化阶段,杆件应力为

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s) \quad (3.63)$$

由此应力组成的弯矩在上、下弦杆面积相同时为

$$M = \sigma Ah = \sigma_s Ah + E_1 \epsilon Ah - E_1 \epsilon_s Ah \quad (3.64)$$

将这一弯矩代入平衡方程中,常数项导数为零,有效项仅为  $E_1 \epsilon Ah$ 。由于板的挠度是连续变化的,其变形  $\epsilon$  也是统一的。所以在塑性变形时的方程应类似于弹性变形,有

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D_1} \quad (3.65)$$

式中,  $D_1 = \frac{E_1 I}{S}$ 。

其他的网架都有相类似的表达,即将弹性方程中的  $D$  改成  $D_1$ ,即表达塑性强化区的方程。

显然,在网架进入弹塑性变形时,如图 3.11 所示,其平衡方程可分段表示为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \begin{cases} \frac{q}{D} & (|x| > a', |y| > b') \\ \frac{q}{D_1} & (-a' < x < a', -b' < y < b') \end{cases} \quad (3.66)$$

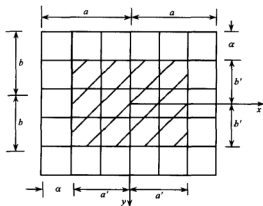


图 3.11 网架弹塑性区间

如果荷载是可以三角函数表示的,这一方程的解用挠度  $w$  表示,在周边铰支条件下有

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (3.67)$$

按傅里叶函数展开“荷载刚度”项,可得

$$\left. \begin{matrix} \frac{q}{D} \\ \frac{q}{D_1} \end{matrix} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (3.68)$$

式中

$$q_{mn} = \frac{1}{ab} \int_a^b \int_{a'}^b \frac{q}{D} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy \\ + \frac{1}{ab} \int_0^{a'} \int_0^{b'} \frac{q}{D_1} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy \quad (3.69)$$

由此计算出在  $q=q_0$  为常数时,

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{mn\pi^2 D} \left( 1 - \sin \frac{m\pi a'}{2a} \right) \left( 1 - \sin \frac{n\pi b'}{2b} \right) \\ + \frac{4q_0}{mn\pi^2 D_1} \left( \sin \frac{m\pi a'}{2a} \right) \left( \sin \frac{n\pi b'}{2b} \right) \quad (3.70)$$

将挠度表达式代入平衡方程,再与  $q_{mn}$  项相比较,得出待定系数

$$A_{mn} = \frac{1}{\left( \frac{m\pi}{2a} \right)^4 + \left( \frac{n\pi}{2b} \right)^4} \left[ \frac{4q_0}{mn\pi^2 D} \left( 1 - \sin \frac{m\pi a'}{2a} \right) \left( 1 - \sin \frac{n\pi b'}{2b} \right) \right. \\ \left. + \frac{4q_0}{mn\pi^2 D} \sin \frac{m\pi a'}{2a} \sin \frac{n\pi b'}{2b} \right] \quad (3.71)$$

按拟板法弯矩式,在弹性区有

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_y &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

在塑性区有

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -M_s - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_y &= -M_s - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

由此分别计算和设计网架上、下弦杆的面积。因为在塑性区的挠度大于弹性区的挠度,所以上、下弦杆件的内力或应力在弹性区没有达到  $\sigma_s$ ,而在塑性区则会有  $\sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s)$  值。

网架的上、下弦杆设计可以采用分段或分别于弹性区、塑性区统一杆件的方法。这时在塑性区以跨中处的弯矩值为标准,而在弹性区采用弹塑性交界处的弯矩值。在这里有

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sigma_s A h \quad (3.74)$$

将  $w$  之表达式代入上式,在给定材料  $\sigma_s$  及网架高度  $h$  等基础上,可以计算出上、下弦杆件面积  $A$ 。

在用式(3.67)级数计算时,可仅取前几项即够精确。而腹杆承担剪力时,一般地仍按弹性计算,因为跨中弯矩最大处剪力都较小。剪力公式为

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ V_y &= -D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

由各节点的剪力,参照 3.1 节中关于斜腹杆轴力与节间剪力及节点集中力之关系,可以求出各斜腹杆的轴力,由此设计各斜腹杆的面积。

本节以正交正放矩形网架说明网架结构在弹塑性变形时的非线性分析,这一方法具有普遍指导意义,下一节将对三向类网架进一步分析其非线性的结构内力。除此以外,还可推广到其他的如四角锥网架结构。

### 3.4 三向网架的塑性计算

图 3.12 所示为三向类六边形网架的平面图。这样的三向交叉梁式网架的挠度方程可表示为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = \frac{qS}{EI} \sin 60^\circ \quad (3.76)$$

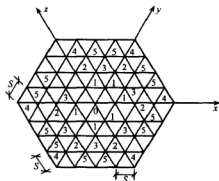


图 3.12 三向网架平面

利用差分可以对此进行弹性范围的求解。如按图 3.12 中所示网格节点编号,间距  $S=5\text{m}$ ,对角线长  $40\text{m}$ ,可以形成如下差分公式:

$$18w_0 - 4(6w_1) + 6w_2 = \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

$$18w_1 - 4(w_0 + 2w_1 + w_2 + 3w_3) + w_1 + 2w_3 + w_4 + 2w_5 = \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

$$18w_2 - 4(w_1 + 2w_3 + w_4 + 2w_5) + w_0 + 2w_2 = \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

$$18w_3 - 4(2w_1 + 2w_2 + 2w_5) + 2w_1 + 2w_5 = \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

$$18w_4 - 4(w_2 + 2w_5) + w_1 + 2w_3 + 3w'_4 = \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

$$18w_5 - 4(w_2 + w_3 + w_4 + w_5) + w_1 + w_3 + w_4 + w'_5 = \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

由周边铰支条件,  $w'_5 = w_5, w'_4 = w_4$ , 解此代数方程, 得

$$w_0 = 7.45 \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ \quad w_1 = 6.72 \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

$$w_2 = 4.70 \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ \quad w_3 = 5.34 \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

$$w_4 = 2.02 \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ \quad w_5 = 2.86 \frac{qS^5}{EI} \sin 60^\circ$$

对应的弯矩可用差分表示, 以 0 点代表为

$$M_x^0 = -EI \frac{2w_1 - 2w_0}{S^2}$$

$$M_y^0 = -EI \frac{2w_1 - 2w_0}{S^2}$$

$$M_z^0 = -EI \frac{2w_1 - 2w_0}{S^2}$$

依次类推, 求其他节点的弯矩。根据节点弯矩可求出上、下弦杆的轴力, 设计上、下弦杆。

在 0 点的剪力为

$$V_x = EI \frac{6w_0 - 4w_1 + 2w_2}{S^3} = V_y = V_z$$

由  $V = V_x + V_y + V_z, N_s = \frac{V}{\cos \alpha}$  可求出斜腹杆轴力。据此设计腹杆。

类似于 3.3 节的分析, 正六边形网架拟板法在弹性变形时有挠度方程

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) = \frac{q}{D} \sin 60^\circ \quad (3.77)$$

如果材料是弹塑性的, 即网架部分进入塑性强化阶段, 则有塑性变形挠度方程

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) = \frac{q}{D_1} \sin 60^\circ \quad (3.78)$$

式中,  $D, D_1$  与 3.3 节同。弹塑性范围如图 3.13 所示, 其中阴影部分表示周边铰支时的塑性变形部分。

对于弹塑性方程式 (3.77) 和式 (3.78), 如果荷载刚度比项能展成三角函数, 那么在网架周边铰支时, 可取挠度函数  $w$  为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mnk} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{k\pi z}{2a} \quad (3.79)$$

式中,  $A_{mnk}$  为待定常数;  $a$  为塑性区在各坐标上的长度。

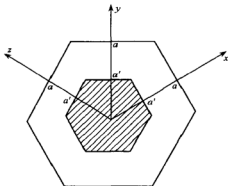


图 3.13 六边形网架弹性图

式(3.77)和式(3.78)方程右边项也展开成类似的级数,有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{mnk} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{k\pi z}{2a} \quad (3.80)$$

其中,  $q_{mnk}$  则为

$$\begin{aligned} q_{mnk} &= \frac{1}{a^3} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{D} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{k\pi z}{2a} dx dy dz \\ &\quad + \frac{1}{a^3} \int_0^{a'} \int_0^{a'} \int_0^{a'} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{D_1} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{k\pi z}{2a} dx dy dz \\ &= \frac{4\sqrt{3}q}{mnk\pi^3 D} \left(1 - \sin \frac{m\pi a'}{2a}\right) \left(1 - \sin \frac{n\pi a'}{2a}\right) \left(1 - \sin \frac{k\pi a'}{2a}\right) \\ &\quad + \frac{4\sqrt{3}q}{mnk\pi^3 D_1} \sin \frac{m\pi a'}{2a} \sin \frac{n\pi a'}{2a} \sin \frac{k\pi a'}{2a} \end{aligned} \quad (3.81)$$

由方程求出弹性变形时  $A_{mnk}$  为

$$\begin{aligned} A_{mnk} &= \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^4 + \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^4 + \left(\frac{k\pi}{2a}\right)^4} \left[ \frac{4\sqrt{3}q}{mnk\pi^3 D} \left(1 - \sin \frac{m\pi a'}{2a}\right) \left(1 - \sin \frac{n\pi a'}{2a}\right) \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \sin \frac{k\pi a'}{2a}\right) + \frac{4\sqrt{3}q}{mnk\pi^3 D_1} \sin \frac{m\pi a'}{2a} \sin \frac{n\pi a'}{2a} \sin \frac{k\pi a'}{2a} \right] \end{aligned} \quad (3.82)$$

这样就获得弹性变形时的挠度,为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mnk} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{k\pi z}{2a} \quad (3.83)$$

按三向网架的布置方式及图 3.13 所示坐标,与  $x$  轴正交方向上、下弦杆组成的弯矩在弹性区为

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \sin 60^\circ \quad (3.84)$$



在塑性区为

$$M_x = -M_1 - D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \sin 60^\circ \quad (3.85)$$

考虑到结构布置的对称性,仅计算这一方向就足够。这里的  $D$  与  $D_1$  分别为

$$D = \frac{EI}{S} \quad D_1 = \frac{E_1 I}{S} \quad I = \frac{A_k A_f}{A_k + A_f} h^2 \quad (3.86)$$

**算例 3.3** 设有边长为 20m 的周边铰支正六边形桁架梁式网架,高  $h=2.5\text{m}$ ,  $E=2.1 \times 10^4 \text{kN/cm}^2$ ,  $E_1=1.5 \times 10^4 \text{kN/cm}^2$ ,  $\sigma_s=210 \text{N/mm}^2$ 。网架梁间距  $s=5\text{m}$ 。计算各杆件内力。

**解** 由给定的几何尺寸计算  $a=20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\text{m}$ ,仅取级数项中第一项计算挠度及弯矩。在网架中心处首先进入塑性时,有

$$\frac{EI}{S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \sin 60^\circ = M_1 = \sigma_s A h \quad (x=y=z=0)$$

这里的  $w$  应取弹性范围的表示,即荷载  $q=q_0$  时有

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1024 q_0 a^4 \sin 60^\circ}{EI \pi^3 m n k (m^4 + n^4 + k^4)} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{k\pi z}{2a}$$

如取  $m=n=k=1$ ,即取级数第一项,则有  $q_0=3.1 \text{kN/m}^2$  (计入荷载系数),得

$$w = \frac{1024 q_0 a^4 \sin 60^\circ}{3EI \pi^3} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi z}{2a}$$

在  $x=y=z=0$  处,则有

$$A = \frac{128 q_0 a^2}{\sigma_s \pi^3 h} = \frac{128 \times 3.1 \times (10\sqrt{3})^2}{21 \times 2.5 \times \pi^3} = 7.41 \text{cm}^2$$

故选用  $A_3$  钢管  $d=54\text{mm}$ ,其厚  $t=5.0\text{mm}$ ,这时  $A=7.70 \text{cm}^2$ ,配置网架的上、下弦杆,即为网架弹性极限设计。

考虑施工方便,全部网架上、下弦可统一按此钢管进行配置。也可分段配置,按挠度及弯矩大小从跨中到支座逐步减少。

现在考虑网架的弹塑性变形,即网架中心部分进入塑性时,按钢管材料的强化进行计算;而其周边按弹性计算。这时采用本节推导出的挠度式及荷载展式计算。

例如在塑性区范围为  $a'=\frac{a}{2}$  时,其挠度表达式为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\left( \frac{m\pi}{2a} \right)^4 + \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^4 + \left( \frac{k\pi}{2a} \right)^4} \left[ \frac{4\sqrt{3}q_0}{mnk\pi^3 D} \left( 1 - \sin \frac{m\pi}{4} \right) \left( 1 - \sin \frac{n\pi}{4} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left( 1 - \sin \frac{k\pi}{4} \right) + \frac{4\sqrt{3}q_0}{mnk\pi^3 D_1} \sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{k\pi}{4} \right] \right\} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{k\pi z}{2a}$$

在仅取级数第一项,即  $m=n=k=1$  时计算,此时跨中点进入塑性,其弯矩关系式为

$$\frac{E_1 I}{S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_0 \sin 60^\circ = \sigma_s A h + \frac{E_1 I}{S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_a \right)$$

将以上  $w$  代入, 可以求出这时的面积  $A$  即网架上、下弦面积为

$$A = \frac{88 q_0 a^2}{\sigma_s \pi^4 h} = 5.05 \text{ cm}^2$$

显然在计入塑性强化条件后, 各杆件的使用应力增大, 设计的杆件断面变小。如果每个上、下弦杆件面积分别取  $7.41 \text{ cm}^2$  (弹性) 和  $5.55 \text{ cm}^2$  (弹塑性), 则网架的杆件材料会大大节约。

### 3.5 网架非线性分析的变分方法<sup>1)</sup>

在 3.3 节对网架进行弹塑性分析基础上, 本节用变分方法进一步分析网架的非线性问题。结构最小势能原理的一般变分式为

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.87)$$

对于薄板, 用  $w$  表示其挠度。在仅有法向荷载  $q$  作用时的变分式为

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + q \right] \delta w dx dy = 0 \quad (3.88)$$

考虑弯矩与挠度之关系, 对网架结构的拟板来说, 则有挠度表达变分式

$$\iint_D \left[ B \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \delta w dx dy = 0 \quad (3.89)$$

对于正交斜放的矩形网架, 式中  $A=6, B=\frac{EI}{2S}, S$  为桁架梁间距,  $I=\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} h^2, A_1, A_2$  分别为网架上、下弦杆截面积,  $h$  为上、下弦之间距。

计入网架材料的弹塑性, 即杆件材料有塑性强化效应时, 物理关系为

$$\sigma = \sigma_s + E_1 (\epsilon - \epsilon_s) \quad (3.90)$$

按拟板法分析, 则有

$$\epsilon_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.91)$$

而弯矩则为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sigma_x A h \\ M_y &= \sigma_y A h \\ M_{xy} &= \tau_{xy} A h \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

由强化阶段的物理关系得

$$M_x = \sigma_s A h + E_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \epsilon_s \right) A h \quad (3.93)$$

1) 贾乃文等. 三向六边形网架的弹塑性变分解. 空间结构, 2001 年 2 期

将其代入变分式,则有强化阶段的变分表达

$$\iint_{\Omega_1} \left[ B_1 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \delta w dx dy = 0 \quad (3.94)$$

式中,  $\Omega_1$  是  $\Omega$  的一部分或全部。在一般情况下,网架呈弹塑性变形,弯矩较大处进入塑性强化,而在弯矩较小处仍处于弹性范围,那么变分式为弹性  $\Omega_2$  与塑性  $\Omega_1$  之和,即

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_2} \left[ B \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \delta w dx dy \\ & + \iint_{\Omega_1} \left[ B_1 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \delta w dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

式中,网架总面积  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ ;  $B_1$  是与  $B$  相类似的表达,仅将弹性拟板中的  $B$  中的  $E$  改成  $E_1$  而得;变分式中的  $w$  可取带任意常数的满足边界条件的级数式。

**算例 3.4** 矩形网架,周边铰支,边长分别为  $2a$  与  $2b$ 。在荷载  $q$  作用下,先在网架中点  $o$  处发生极限变形,随  $q$  增大,网架的塑性区成  $2a' \times 2b'$  范围,如图 3.14 所示之斜线部分。计算网架各杆轴力。

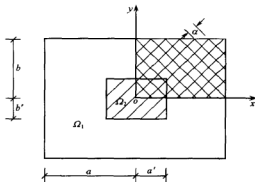


图 3.14 矩形网架弹塑性图

**解** 选取挠度函数  $w$  为

$$w = m(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

式中,  $m$  为待定常数。

$$\delta w = (x^2 y^2 - a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2) \delta m$$

取正交斜放桁架梁式网架,如图 3.14 中  $x > 0, y > 0$  部分网格,则有

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 24m$$

变分方程写为

$$\iint_{\Omega_1} \left( \frac{12mEI}{S} - q \right) (x^2 y^2 - a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2) \delta m dx dy$$

$$+ \iint_{\bar{a}_2} \left( \frac{12mE_1 I}{S} - q \right) (x^2 y^2 - a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2) \delta m dx dy = 0$$

按图 3.14 中的积分面积分别积分,则有

$$4 \left( \frac{12mE_1 I}{S} - q \right) \left( \frac{4}{9} a^3 b^3 - \frac{a'^3 b'^3}{9} + \frac{a^2 a' b'^3}{3} + \frac{a'^3 b^2 b'}{3} - a^2 b^2 a' b' \right) \\ + 4 \left( \frac{12mE_1 I}{S} - q \right) \left( \frac{a'^3 b'^3}{9} - \frac{a^2 a' b'^3}{3} - \frac{a'^3 b^2 b'}{3} + a^2 b^2 a' b' \right) = 0$$

由此可以求出  $m$  值。

如  $a' = b' = 0$ , 则  $m$  为

$$m = \frac{Sq}{12EI}$$

$$I = \frac{A_{\perp} A_{\parallel}}{A_{\perp} + A_{\parallel}} h^2$$

如  $a = 2a'$ ,  $b = 2b'$ ,  $A_{\perp} = A_{\parallel}$ , 则有

$$m = \frac{Sq}{Ah^2(0.79E + 0.71E_1)}$$

此时挠度函数为

$$w = \frac{Sq}{2Ah^2(0.79E + 0.71E_1)} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

正交斜放网架的结构设计与计算由给定的弹塑性交界线边界,可以确定外荷载与网架上、下弦杆件面积  $A$  之关系。

由拟板法的内力与挠度之关系,对正交斜放网架,有

$$M_x = - \frac{EI}{2S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

如果这一弯矩刚好到达塑性,必有

$$- \frac{EI}{2S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \sigma_s Ah$$

现将图 3.14 中的临界点  $\left( \frac{a}{2}, 0 \right)$  代入,得

$$\frac{EI}{2S} \left[ \frac{Sq \left( 2b^2 + \frac{3}{2}a^2 \right)}{Ah^2(0.79E + 0.71E_1)} \right] = \sigma_s Ah$$

在上、下弦杆件面积相等时,有  $I = \frac{1}{2} Ah^2$ , 上式写为

$$\frac{\left( 2b^2 + \frac{3}{2}a^2 \right) Eq}{4(0.79E + 0.71E_1)} = \sigma_s Ah$$

在给定外荷载  $q$  时,可以确定出网架弦杆截面积  $A$  为

$$A = \frac{\left(2b^2 + \frac{3}{2}a^2\right)Eq}{4\sigma_s h(0.79E + 0.71E_1)}$$

这一弦杆是利用弹塑性交界线处内力计算的。桁架梁的全部弦杆可据此设计成统一大小,这样在弹性区,杆件轴应力尚未达到 $\sigma_s$ ,而在塑性区,应力则按 $\sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s)$ 计算。

**算例 3.5** 设计  $a = 40\text{m}$ ,  $b = 30\text{m}$  网架。高  $h = 2.5\text{m}$ , 设网架承受活载  $2\text{kN/m}^2$ , 网架自重  $0.25\text{kN/m}^2$ , 杆件材料  $E = 2.1 \times 10^4 \text{kN/cm}^2$ ,  $E_1 = 1.5 \times 10^4 \text{kN/cm}^2$ ,  $\sigma_s = 210 \text{N/mm}^2$ 。

**解** 由以上数据计算出

$$A = 14.82 \times 10^{-4} \text{m}^2$$

结构设计时,也可由选定的杆件截面积  $A$  计算承担的外荷载。如取上、下弦杆  $A = 5 \times 10^{-4} \text{m}^2$ , 那么按弹塑性分析,承担的荷载  $q = 1.2 \text{kN/m}^2$ 。

网架的上、下弦杆也可采用分段设计的办法。将网架的弹性区和塑性区分成若干段,每一段计算出最大挠度,分别求出弹性和塑性的弯矩,再依据上、下弦轴力与弯矩之关系,计算出杆件截面积。

斜腹杆的设计可按拟板法的剪力进行设计,一般地,均限定在弹性范围,可参照前面几节方法进行。这是因为按周边简支板计算,弯矩较大时,剪力较小。

### 3.6 三向网架的塑性变分解法

在 3.5 节网架非线性分析的变分方法基础上,这里用变分方法进行三向网架的弹塑性内力求解。

三向类网架拟板法的挠度方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{B_3} \quad (3.96)$$

式中,  $B_3 = \frac{9EI}{8S}$ 。

类似于 3.5 节矩形网架的分析,可知最小势能原理在三向类网架的弹塑性表述式为

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \iint_{\Omega_1} \left[ \frac{9EI}{8S} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \delta w dx dy \\ & + \iint_{\Omega_2} \left[ \frac{9E_1 I}{8S} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \delta w dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

以图 3.15 中正六边形三向网架为例,设网架周边铰支。荷载  $q$  作用下弹塑性范围如图 3.15 所示。图中阴影部分为塑性强化部分。而三向类网架的格式也表示

在图中,由 3 个 方向互成  $60^\circ$  相交的桁架梁所组成。

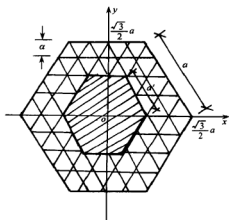


图 3.15 三向类网架弹性图

如图 3.15 所示网架拟板,6 个边长为  $a$ ,且周边简支,可取挠度为

$$\begin{aligned}
 w &= m \left( y - \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) \left( y + \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) [y - \sqrt{3}(x+a)][y + \sqrt{3}(x+a)] \\
 &\quad \cdot [y - \sqrt{3}(x-a)][y + \sqrt{3}(x-a)] \\
 &= m \left( y^2 - \frac{3}{4}a^2 \right) (y^4 - 6x^2y^2 + 9x^4 - 18a^2x^2 - 6a^2y^2 + 9a^4) \quad (3.98)
 \end{aligned}$$

由此式求出

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= 144m(2x^2 + 2y^2 - 3a^2) \quad (3.99) \\
 \delta w &= \left( y^2 - \frac{3}{4}a^2 \right) (y^4 - 6x^2y^2 - 6a^2y^2 + 9x^4 - 18a^2x^2 + 9a^4) \delta_m \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

代入最小势能原理方程,在弹性区间  $\Omega_2$  部分的积分为

$$\begin{aligned}
 &\iint_{\Omega_2} \left[ \frac{9EI}{8S} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \delta w dx dy \\
 &= \frac{648EI m}{S} (-0.014a^{10} - 0.034a^9a + 1.38a^8a^2 + 2.23a^7a^3 - 5.33a^6a^4 \\
 &\quad + 0.08a^5a^5 + 15.54a^4a^6 + 2.93a^3a^7 + 2.53a^2a^8 + 5.05a^1a^9 - 17.4a^{10}) \\
 &\quad - 4q(-2.39a^8 - 6.24a^7a' + 6.5a^6a'^2 + 0.04a^5a'^3 - 2.86a^4a'^4 \\
 &\quad + 1.71a^2a'^6 - 0.0015aa'^7 - 0.007a'^8)
 \end{aligned}$$

在塑性部分  $\Omega_1$  的积分为

$$\iint_{\Omega_1} \left[ \frac{9EI}{8S} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \delta w dx dy$$

$$= \frac{36E_1 I m}{S} (-26.73a'^{10} - 6.86a'^8 a^2 + 133.15a'^6 a^4 - 231.53a'^4 a^6 \\ - 103.92a'^2 a^8) - 4q(0.02a'^8 - a'^6 a^2 + 3a'^4 a^4 - 4.4a'^2 a^6)$$

式中,  $a'$  为图 3.15 中的塑性强化六边形边长;  $S$  为网架桁架梁的间距;  $I$  为网架刚度, 其值用上、下弦杆面积  $A_{\pm}$ 、 $A_{\mp}$  与高度  $h$  表示为

$$I = \frac{A_{\pm} A_{\mp}}{A_{\pm} + A_{\mp}} h^2$$

在  $A_{\pm} = A_{\mp}$  时,  $I = \frac{1}{2} A h^2$ 。

由变分方程  $\delta \Pi = 0$ , 将以上两组积分相加并等于零, 可以确定出待定常数  $m$  与外荷载  $q$  以及  $a$ 、 $a'$  等之关系。

如取  $a = 2a'$ , 可以得出  $m$  与各参数关系为

$$a'^2 \left( \frac{2218.8E}{S} + \frac{435E_1}{S} \right) I m = q$$

由此求出  $m$  为

$$m = \frac{q}{a'^2 I \left( \frac{2218.8E}{S} + \frac{435E_1}{S} \right)}$$

相应的挠度函数为

$$w = \frac{qS}{a'^2 I (2218.8E_1 + 435E_1)} \left( y^2 - \frac{3}{4} a^2 \right) (y^4 - 6x^2 y^2 + 9x^4) \\ - 18a^2 x^2 - 6a^2 y^2 + 9a^4) \quad (3.101)$$

**算例 3.6** 计算边长  $a = 20\text{m}$  的周边铰支六边形桁架梁式平板网架, 网架高为  $h = 2.5\text{m}$ 。材料的弹性模量  $E = 2.1 \times 10^4 \text{kN/cm}^2$ , 强化模量  $E_1 = 1.5 \times 10^4 \text{kN/cm}^2$ ,  $\sigma_s = 210 \text{N/mm}^2$ 。设网架承受外荷载为  $2 \text{kN/m}^2$ , 网架自重为  $0.25 \text{kN/m}^2$ 。设计网架的杆件。

**解** 如果网架的荷载使杆件进入塑性强化阶段, 在弹塑性交界处, 必有

$$\frac{9EI}{8S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \sigma_s A h$$

将  $I = \frac{1}{2} A h^2$  代入, 则有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{108 S q a'^2}{A h^2 (1109.4E + 217.5E_1)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{-108 S q a'^2}{A h^2 (1109.4E + 217.5E_1)}$$

将以上两式代入临界方程, 得

$$\frac{81 q a'^2 E}{2(1109.4E + 217.5E_1)} = \sigma_s A h$$

由此解出面积为

$$A = \frac{81qa'^2E}{2\sigma_s h(1109.4E + 217.5E_1)}$$

按给出的参数  $\sigma_s$ 、 $E$ 、 $a'$ 、 $h$  等代入上式,则有

$$A = 1.32 \times 10^{-4} \text{m}$$

反之,如选取杆件截面  $A = 5 \times 10^{-4} \text{m}^2$ ,则由上式求出可承担荷载总荷载  $q = 13.11 \text{kN/m}^2$ ,包括活载与网架自重。再考虑荷载系数之后,能确定出网架能够承担的活荷载。

依据这样的面积可以选择网架结构上、下弦杆的杆件大小及规格,例如选取钢管,查材料手册可知钢管的直径。上、下弦杆的规格可分段设计,在弹性区,其弯矩公式为

$$M_x = -\frac{9EI}{8S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

在塑性区,弯矩公式为

$$M_x = -\frac{9E_1 I}{8S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

式中,  $w$  为拟板挠度,取本节中的式(3.101)。

在塑性区,可以由  $w$  求出  $M_x$ ,再由  $M_x = [\sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s)]Ah$ ,可以设计塑性区的杆件。弹性区的杆件可由临界处杆件取统一值。剪力的计算按拟板公式为

$$V_x = -\frac{9EI}{8S} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (3.102)$$

由剪力  $V_x$  及节点荷载等设计斜腹杆,方法同前,不再赘述。

按结构的对称性分析,仅计算  $x$  方向桁架梁的上、下弦杆及腹杆,其他互为  $60^\circ$  的两个方向的桁架梁的上、下弦杆及腹杆,与  $x$  方向相同配置。

本节以正六边形三向类网架为例,说明三向类网架的弹塑性变分解法,三向类网架的其他边界构成的结构都可参照 3.5 节及本节的  $w$  构成方法进行变分计算,获得结构的挠度及内力以及进一步的结构设计。

### 3.7 网架结构的塑性极限分析

结构的塑性极限分析是一种结构的非线性计算,旨在求出结构的极限荷载。

网架结构可用拟板法求出弹性解,也可以用板的塑性极限分析方法对网架结构进行塑性极限分析。极限分析可采用机动法和静力法,它们分别求出结构极限荷载的上限与下限。

对于正多边形如正方形、正六边形等以至圆形板结构,机动法是假定结构的合理破坏模式,形成塑性破坏的塑性铰线。如图 3.16(a)所示的周边铰支六边形板,极限状态时虚线为其塑性铰线,并形成 6 个刚性板块,其变形如图(b)所示,中点  $O$  的变形高为  $\delta$ ,位置为  $O'$ 。由于板在开始破坏瞬间,其中点的挠度  $\delta$  与板的其他



尺寸相比是很小的,所以板破坏后形成棱锥形的棱长可用其水平投影的长度代替。达到极限状态时,板的外力功为

$$W_e = q\delta \int_V w dV \quad (3.103)$$

式中,  $\delta \int_V w dV$  表示棱锥体的体积。如果是正六边形板,且边长为  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ ,那么六棱锥体积是  $V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \delta$ ,外力功为

$$W_e = \frac{\sqrt{3}}{2} q a^2 \delta \quad (3.104)$$

如果是圆板,那么图 3.16 中的(b)为一圆锥体,其体积在圆板半径为  $a$  时有  $V = \frac{2}{3} \pi a^2 \delta$ ,外力功为

$$W_e = \frac{2}{3} q \pi a^2 \delta \quad (3.105)$$

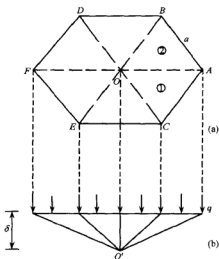


图 3.16 六边形板塑性铰线

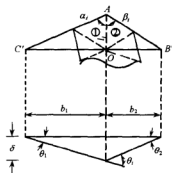


图 3.17 板块相对转角

结构变形的内力功  $W_i$  则与板块相对转角有关。如设图 3.17 中板①与板②的相对转角为  $\theta_i$ ,可过  $O$  点做一平面与塑性铰线  $OA$  垂直,该平面与板的两个边的延长线交于  $B'$ 、 $C'$  点,由图中可知,

$$\theta_i = \frac{\delta}{b_1} + \frac{\delta}{b_2}$$

再将几何关系

$$b_1 = l_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad b_2 = l_i \operatorname{tg} \beta_i$$

代入上式,得

$$\theta_i = \frac{\delta}{l_i} (\text{ctg} \alpha_i + \text{ctg} \beta_i) \quad (3.106)$$

塑性极限弯矩在塑性铰线上为常值  $M_i$ , 它做的内力功为

$$\begin{aligned} W_i &= M_i \sum \theta_i l_i \\ &= M_i \delta \sum (\text{ctg} \alpha_i + \text{ctg} \beta_i) \end{aligned} \quad (3.107)$$

对正六边形板, 有  $\alpha_i = \beta_i = \frac{\pi}{3}$ , 故有

$$W_i = \frac{12}{\sqrt{3}} M_i \delta \quad (3.108)$$

由内力功与外力功相等, 即  $W_e = W_i$ , 得极限荷载为

$$q^+ = 8 \frac{M_i}{a^2} \quad (3.109)$$

为真实极限荷载的上限。

类似地, 可以求出其他类型的正多边形以至圆形板的极限荷载上限。

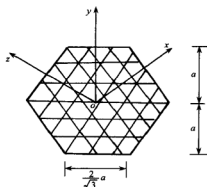


图 3.18 正六边形板网架

用静力法可以分析出板结构极限荷载的下限。这里采用半逆解法。半逆解法通常是先假设结构的一部分内力, 再由平衡方程及边界条件求出结构的另一部分内力。将全部内力代入极限条件, 由此确定出下限解的极限荷载。

利用静力法求网架结构的极限荷载时, 一般采用的半逆解法是: 先从边界条件出发假设网架的弯矩内力, 这些弯矩内力带有待定常数; 再将全部内力代入极限条件求下限解。

以图 3.18 所示的正六边形周边铰支的三向网架为例, 说明周边简支网架拟板静力解法。设三向网架采用图 3.18 中所示三向坐标, 两对边长为  $2a$ , 正六边形每边长为  $\frac{2}{\sqrt{3}}a$ 。

设极限状态下的内力为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= C(a^2 - x^2) \\ M_y &= C(a^2 - y^2) \\ M_z &= C(a^2 - z^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.110)$$

这些方程满足铰支边的边界条件, 代入三向网架拟板的平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} = -q \sin 60^\circ \quad (3.111)$$

由此求出  $C$  与  $q$  之关系为

$$C = -\frac{\sqrt{3}}{12}q \quad (3.112)$$

平面问题的 Mises 塑性屈服条件为

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 = \sigma_s^2 \quad (3.113)$$

将它用弯矩表示,并考虑到图 3.18 中的坐标系,有

$$M_x^2 - M_x(M_y\cos 30^\circ + M_z\cos 30^\circ) + (M_y\cos 30^\circ + M_z\cos 30^\circ)^2 = M_s^2 \quad (3.114)$$

展开得

$$\begin{aligned} M_x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}M_xM_y - \frac{\sqrt{3}}{2}M_xM_z + \frac{3}{4}M_y^2 + \frac{3}{2}M_yM_z \\ + \frac{3}{4}M_z^2 = M_s^2 \end{aligned} \quad (3.115)$$

将  $M_x$ 、 $M_y$  及  $M_z$  的具体表达式代入,并用  $g$  函数表达等式左边,得出

$$\begin{aligned} g(x^2y^2z^2) = C^2 \left[ (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) + \frac{3}{4}(a^4 - 2a^2y^2 + y^4) \right. \\ \left. + \frac{3}{4}(a^4 - 2a^2z^2 + z^4) - \frac{\sqrt{3}}{2}(a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 + x^2y^2) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}}{2}(a^4 - a^2x^2 - a^2z^2 + x^2z^2) + \frac{3}{2}(a^4 - a^2y^2 - a^2z^2 + y^2z^2) \right] \end{aligned} \quad (3.116)$$

由于  $\frac{\partial^2 g}{\partial^2(x^2)} > 0$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial^2(y^2)} > 0$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial^2(z^2)} > 0$ , 表明函数  $g$  的最大值在边界上,考虑到结构的对称,只要计算板的中心点、板各边中点及各棱角点就能进行极限荷载的下限分析。

如取板的中心点,即  $x=y=z=0$  代入 Mises 屈服条件中,则有  $q$  为

$$q = \frac{12}{\sqrt{3}(4 - \sqrt{3})} \frac{M_s}{a^2} \quad (3.117)$$

如取板各边中点,即  $x=a, y=z=0$ , 代入 Mises 屈服条件式中,则有  $q$  为

$$q = \frac{12}{3\sqrt{3}} \frac{M_s}{a^2} \quad (3.118)$$

如取各棱角点,即  $x=0, y=z=a$ , 代入 Mises 屈服条件中,则有  $q$  为

$$q = \frac{12M_s}{\sqrt{3}a^2} \approx 6.93 \frac{M_s}{a^2} \quad (3.119)$$

在以上解答中,选取数值最大的  $q$  为极限荷载下限,即  $q = 6.93 \frac{M_s}{a^2}$ , 再与机动法比较可知,真实极限荷载  $q$  为

$$6.93 \frac{M_i}{a^2} < q < \frac{8M_i}{a^2} \quad (3.120)$$

进行以上网架的极限分析时,设网架的周边为铰支边界,其弯矩为零。而沿塑性铰线的网架中弯矩为  $M_i$ ,再利用差分方法可求出各网架节点的弯矩,再进行网架上、下弦杆的截面设计。由于两种边界既有挠度表达的铰支边界条件,又有弯矩表达为常数  $M_i$  的边界条件,这里要采用一种混合差分的方法求网架各节点的弯矩。

**算例 3.7** 设有边长 20m 的正六边形网架,高  $h=2.5\text{m}$ ,  $E=2 \times 10^4 \text{kN/cm}^2$ ,  $\sigma_s=210 \text{N/mm}^2$ 。结构自重为  $0.25 \text{kN/m}^2$ ,活载  $2 \text{kN/m}^2$ 。进行结构极限设计。

**解** 计算极限荷载为  $q=3.1 \text{kN/m}^2$ 。取上、下限的平均值  $q = \frac{7.5M_i}{a^2}$ ,求得  $M_i=165.3 \text{kN} \cdot \text{m}$ 。利用混合差分求得各杆件的弯矩。

在  $M_i=165.3 \text{kN} \cdot \text{m}$  时得上、下弦杆面积  $A$  为

$$A = \frac{M_i}{\sigma_s h} = 3.14 \text{cm}^2$$

可以统一按此  $A$  值选取各杆件的尺寸及型号,也可分段设计上、下弦杆件的截面积。

其他矩形、正多边形网架的极限荷载及设计都可照此分析进行。

### 3.8 正交异性圆形网架塑性设计<sup>1)</sup>

图 3.19 所示为圆形正交网架。在网架周边铰支条件下,考虑到网架在径向与环向有不同的弯矩,因此网架的制作在径向与环向可选用不同的材质,这就形成了正交异性圆形网架的计算问题。如果制作网架的材料具有线性强化特性,利用材料的塑性,充分发挥材料的承载能力,合理分配结构的尺寸与强度,无疑可以提高空间结构的设计水平和节省材料。

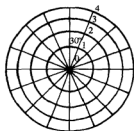


图 3.19 圆形正交网架

线性强化材料的应力-应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\epsilon & (\epsilon < \epsilon_s) \\ \sigma &= \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s) & (\epsilon \geq \epsilon_s) \end{aligned} \right\} \quad (3.121)$$

式中,  $\sigma_s, \epsilon_s$  分别为材料的屈服应力和应变;  $E$  和  $E_1$  分别为材料的弹性模量与强化阶段的模量。

设网架的挠度为  $w$ , 受荷载  $q$  作用。考察轴对称条件下的圆形正交正放桁架梁

1) 贾乃文等. 塑性强化正交异性圆形网架计算. 特种结构, 1998 年 4 期

式网架,即它的径向、环向弯矩与角度无关。则有  $w=w(r)$ ,  $q=q(r)$ , 仅是径向坐标  $r$  的函数。

挠度方程为

$$D_r \left( \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right) + D_\theta \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = q(r) \quad (3.122)$$

式中,  $D_r$  为网架梁径向抗弯刚度;  $D_\theta$  为它的环向抗弯刚度。这里引入比值  $\alpha = \frac{D_\theta}{D_r}$ 。

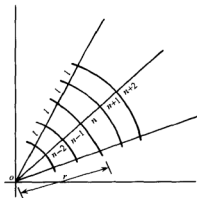


图 3.20 差分网格图

用差分法解网架结构,将式(3.122)化为差分方程,设网格的径向间距为  $l$ ,对图 3.20 中的任意点  $n$ ,可以写出差分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l^4} (w_{n+2} - 4w_{n+1} + 6w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2}) + \frac{1}{rl^3} (w_{n+2} - 2w_{n+1} \\ & + 2w_{n-1} - w_{n-2}) - \frac{\alpha}{r^2 l^2} (w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) + \frac{\alpha}{2r^3 l} (w_{n+1} - w_{n-1}) \\ & = \frac{q(r)}{D_r} \end{aligned} \quad (3.123)$$

整理式(3.123)得

$$\begin{aligned} & w_n \left( \frac{6}{l^4} + \frac{2\alpha}{r^2 l^2} \right) + w_{n+1} \left( -\frac{4}{l^4} - \frac{2}{rl^3} - \frac{\alpha}{r^2 l^2} + \frac{\alpha}{2r^3 l} \right) \\ & + w_{n-1} \left( -\frac{4}{l^4} + \frac{2}{rl^3} - \frac{\alpha}{r^2 l^2} - \frac{\alpha}{2r^3 l} \right) + w_{n+2} \left( \frac{1}{l^4} + \frac{1}{rl^3} \right) \\ & + w_{n-2} \left( \frac{1}{l^4} - \frac{1}{rl^3} \right) = \frac{q(r)}{D_r} \end{aligned} \quad (3.124)$$

式(3.123)或式(3.124)即是圆形网架轴对称荷载下的差分公式。利用  $n$  个节点的  $n$  个方程可以求出节点挠度  $w$ 。

设网架周边铰支,那么在边界上的节点  $n$ ,必有

$$w_{n+1} = -w_{n-1} \quad w_n = 0 \quad (3.125)$$

在网架中心节点 0, 则有  $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$  以及对称条件

$$w_1 = w_{-1} \quad w_2 = w_{-2} \quad (3.126)$$

在圆形正交异性轴对称条件下, 挠度与弯矩、剪力的微分关系为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ M_\theta &= -D_\theta \left( \mu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ V_r &= -D_r \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.127)$$

用差分关系表达上面公式为

$$M_m = -D_r \left[ \frac{1}{l^2} (w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}) + \frac{\mu_\theta}{2rl} (w_{n+1} - w_{n-1}) \right] \quad (3.128)$$

$$M_\theta = -\alpha D_\theta \left[ \frac{\mu_r}{l^2} (w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}) + \frac{1}{2rl} (w_{n+1} - w_{n-1}) \right] \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} V_m &= -D_r \left[ \frac{1}{2l^3} (w_{n+2} - 2w_{n+1} + 2w_{n-1} - w_{n-2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{rl^2} (w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}) - \frac{\alpha}{2r^2 l} (w_{n+1} - w_{n-1}) \right] \end{aligned} \quad (3.130)$$

其余内力不存在。

桁架梁式的网架结构, 每片梁截面的弯矩由上弦杆与下弦杆承担, 设上弦与下弦的截面积分别为  $A_\pm$  与  $A_\mp$ , 其间隔为  $h$ , 可知该梁的惯性矩  $I$  为

$$I = \frac{A_\pm A_\mp}{A_\pm + A_\mp} h^2$$

由此进行上、下弦杆的轴力计算, 并进行杆件的结构设计。这个设计是分段进行的, 在弹性区用式(3.121)中的第一式; 在塑性强化区用式(3.121)中第二式。

在荷载  $q$  比较小时, 按网架计算的差分公式求出内力, 这时结构处于弹性变形范围, 无论是径向还是环向材料的应力-应变均满足关系式  $\sigma = E\varepsilon$ 。

在荷载  $q$  增加时, 网架受力较大部位可能由弹性过渡到强化阶段。对周边铰支圆形网架来说, 最早进入强化阶段的是网架中心点。随荷载增大, 会形成一个以中心为原点的圆。

用差分法计算的网架挠度和内力公式都是线性表达的, 因此我们将结构超过弹性变形荷载  $q$ 、超过弹性变形的挠度  $w$  的部分, 分别写成可叠加部分

$$\left. \begin{aligned} w &= w^e + w^p \\ q &= q^e + q^p \end{aligned} \right\} \quad (3.131)$$

在  $q^e$  作用下, 网架中心点达到弹性极限, 其杆件应力达到  $\sigma_e$ , 对应的挠度为  $w^e$ ; 然后在这一  $w^e$  初挠度条件下, 继续增加荷载  $q^p$ , 网架进入部分弹性、部分强化范围, 此时各点的挠度为  $w^p$ 。在  $w^e$  变形范围, 材料的弹性模量为  $E$ ; 而在  $w^p$  变形

范围,材料的弹性模量用  $E$  与  $E_1$  共同表达。在强化变形圆外,材料用  $E$ 。

强化变形的挠度方程的差分公式(3.124)等将会改变。因为网架在荷载作用下的径向弯矩小于环向弯矩,在适当选择杆件截面时,可以控制强化范围的圆,使之对径向、环向都满足。现设图 3.20 中的  $n$  点进入强化阶段,引入

$$\beta_1 = \frac{D_{r1}}{D_r} \quad \beta_2 = \frac{D_{\theta 1}}{D_\theta} \quad (3.132)$$

式中,  $D_{r1}$ 、 $D_{\theta 1}$  为强化阶段的板的抗弯刚度,则有强化阶段的挠度差分公式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l^4}(w_{n+2} - 4w_{n+1} + 6\beta_1 w_n - 4\beta_1 w_{n-1} + \beta_1 w_{n-2}) \\ & + \frac{1}{r^2 l^3}(w_{n+2} - 2w_{n+1} + 2\beta_1 w_{n-1} - \beta_1 w_{n-2}) \\ & - \frac{\alpha}{r^2 l^2}(w_{n+1} - 2\beta_2 w_n + \beta_2 w_{n-1}) + \frac{\alpha}{2r^3 l}(w_{n+1} - \beta_2 w_{n-1}) \\ & = \frac{q(r)}{D_r} \end{aligned} \quad (3.133)$$

对应的弯矩与挠度差分公式为

$$M_{rn} = -D_r \left[ \frac{1}{l^2}(w_{n+1} - 2\beta_1 w_n + \beta_1 w_{n-1}) + \frac{\mu_\theta}{2rl}(w_{n+1} - \beta_2 w_{n-1}) \right] \quad (3.134)$$

$$M_{\theta n} = -aD_r \left[ \frac{\mu_r}{l^2}(w_{n+1} - 2\beta_1 w_n + \beta_1 w_{n-1}) + \frac{1}{2rl}(w_{n+1} - \beta_1 w_{n-1}) \right] \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} V_{rn} = & -D_r \left[ \frac{1}{2l^3}(w_{n+2} - 2w_{n+1} + 2\beta_1 w_{n-1} - \beta_1 w_{n-2}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{rl^2}(w_{n+1} - 2\beta_1 w_n + \beta_1 w_{n-1}) - \frac{\alpha}{2r^2 l}(w_{n+1} - \beta_2 w_{n-1}) \right] \end{aligned} \quad (3.136)$$

下面以算例说明正交异性圆形网架弹塑性设计的差分计算过程。

**算例 3.8** 有一正交异性圆形桁架梁式网架,直径 40m,周边铰支。计入自重的外荷载  $q=5000\text{N/m}^2$ ,节点间距径向  $l=5\text{m}$ 。用两种不同材质的钢管制作径向与环向桁架梁,  $\alpha=1.11$ 。网格划分如图 3.19 所示。

**解** 按正交异性圆形网架的差分公式(3.123)建立弹性范围的方程:

$$\begin{aligned} & w_0 - w_1 = 0 \\ & -3.67w_0 + 8.22w_1 - 6.55w_2 + 2w_3 = \frac{ql^4}{D_r} \\ & 0.5w_0 - 3.35w_1 + 6.55w_2 - 5.21w_3 = \frac{ql^4}{D_r} \\ & 0.67w_1 - 3.48w_2 + 4.91w_3 = \frac{ql^4}{D_r} \end{aligned}$$

其中,第一方程是由  $r=0, \frac{dw}{dr}=0$  在各向异性条件下所得方程。解以上方程分别得

节点挠度

$$\begin{aligned}w_0 &= -2.74 \frac{ql^4}{D_r} & w_1 &= -2.74 \frac{ql^4}{D_r} \\w_2 &= -1.33 \frac{ql^4}{D_r} & w_3 &= -0.36 \frac{ql^4}{D_r} & w_4 &= 0\end{aligned}$$

设网架材料取钢材,  $\mu_\theta = \mu_r = \frac{1}{3}$ , 将各节点  $w$  代入式(3.128)~(3.130)可求得节点弯矩与剪力。如节点1处有

$$M_r = 191 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_\theta = 163 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad V_r = 3.98 \text{ kN}$$

如网架高取  $h=2.5\text{m}$ , 则上、下弦的轴力在节点1处分别是

$$N_r = 76.4 \text{ kN} \quad N_\theta = 65.2 \text{ kN}$$

取钢材的设计强度在径向为  $R_y = 210 \text{ N/mm}^2$ , 由  $N_r$  求出  $A_r$ ,  $A_r = 3.64 \text{ cm}^2$ , 而在环向也取相同的面积, 对应的设计强度  $R_y = 179 \text{ N/mm}^2$ 。

显然, 网架在径向和环向可选择不同设计强度的材料, 形成圆形正交异性结构, 设计比较合理。

再考虑材料的强化特性。荷载  $q$  可以继续增加, 设节点1进入强化阶段, 由式(3.133)计算  $w$  的线代数方程。如取强化阶段  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ , 得

$$\begin{aligned}w_0 &= 1.5w_1 \\-1.84w_0 + 4.11w_1 - 6.56w_2 + 2w_3 &= \frac{ql^4}{D_r} \\0.34w_1 - 3.48w_2 + 4.91w_3 &= \frac{ql^4}{D_r} \\0.25w_0 - 1.68w_1 + 6.56w_2 - 5.21w_3 &= \frac{ql^4}{D_r}\end{aligned}$$

解方程得

$$\begin{aligned}w_0 &= -13.5 \frac{ql^4}{D_r} & w_1 &= -9 \frac{ql^4}{D_r} & w_2 &= -2.2 \frac{ql^4}{D_r} \\w_3 &= -0.76 \frac{ql^4}{D_r} & w_4 &= 0\end{aligned}$$

将以上  $w$  代入式(3.134)~(3.136), 可以求得各节点弯矩。以节点1为例, 得出

$$M_r = -ql^2$$

在相同结构时, 如果考虑材料的强化效果, 轴向拉力设计时增加  $100 \text{ N/mm}^2$ , 即  $R'_y = 100 \text{ N/mm}^2$ , 则轴力增加  $N_r = 36.4 \text{ kN}$ , 对应的弯矩为  $M_r = 91 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 代入上式反算  $q$  为  $36400 \text{ kN/m}^2$ 。

显然, 利用材料的强化特性, 结构提高了承载力, 充分发挥了材料的效益, 设计合理。

这时, 将两种挠度, 即弹性与强化范围的挠度叠加, 即为网架两次荷载下的总



挠度。

自然这一挠度与网架的弹性变形相比要大,但它承载的能力却大大提高。在结构设计时,还要验算网架的挠度是否满足正常工作条件。本节仅给出它的力学强度方面的计算。

## 第四章 非线性圆形板结构

### 4.1 柱坐标下圆形板的一般解

从薄板理论可知,柱坐标表达的圆形、环形板的弹性曲面一般方程用挠度  $w$  可以表示为

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} \quad (4.1)$$

式中,  $D$  为板的抗弯刚度,其值为  $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ;  $h$  为板厚。

引用柱坐标下表达重调和算子,式(4.1)写为

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (4.2)$$

式(4.2)的解通常由该齐次方程的通解加上非齐次方程的一个特解表示。不同的边界条件及不同形式的荷载  $q$ , 齐次方程的解和相应的特解有不同表达。

对混凝土等工程材料的板结构,取  $\mu=0$ , 由薄板理论获得简化的挠度与弯矩关系为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ M_\theta &= -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ M_{r\theta} &= -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \\ V_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w \\ V_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

显然,求解圆形板结构问题的关键在于求出式(4.2)中的关于  $w$  的齐次解。本节用分离变量方法先求出了齐次解的一般表示,然后利用不同的边界条件或不同荷载形式再找出它的挠度的恰当形式。根据挠度与内力关系式(4.3)能求出板中内力。

现按下列形式组成圆形板挠度  $w$ :

$$w = rR(r)\Phi(\theta) \quad (4.4)$$

式中,  $R$  仅为  $r$  的函数;  $\Phi$  仅为  $\theta$  之函数;因子  $r$  是为以后运算方便而引入的。

可以先算出式(4.4)中以下各量:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \left( \frac{R}{r} + R' \right) \Phi$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = (2R' + rR'') \Phi$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} R \Phi''$$

相加之后得

$$\nabla^2 w = \frac{R}{r} \Phi'' + \left( rR'' + 3R' + \frac{R}{r} \right) \Phi \quad (4.5)$$

式(4.5)可写为

$$\nabla^2 w = w_1 + w_2$$

其中

$$w_1 = r \frac{R}{r^2} \Phi''$$

$$w_2 = r \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right) \Phi$$

所以有

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^2 w_1 + \nabla^2 w_2 \quad (4.6)$$

因为  $w_1, w_2$  的表达式与式(4.4)中的  $w$  有相类似的表达, 如果用  $\frac{R}{r^2}$  代替  $R$ , 用  $\Phi''$  代替  $\Phi$ , 可以类比地用  $\nabla^2 w$  算出  $\nabla^2 w_1$ ; 又如用  $R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2}$  代替  $R$ , 而  $\Phi$  不变, 类比地用  $\nabla^2 w$  算出  $\nabla^2 w_2$ 。分别得出

$$\nabla^2 w_1 = \frac{R}{r^3} \Phi^{(4)} + \left[ r \left( \frac{R}{r^2} \right)'' + 3 \left( \frac{R}{r} \right)' + \frac{R}{r^3} \right] \Phi''$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_2 = & \left( \frac{R''}{r} + 3 \frac{R'}{r^2} + \frac{R}{r^3} \right) \Phi'' + \left[ r \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right)'' \right. \\ & \left. + 3 \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right)' + \frac{1}{r} \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right) \right] \Phi \end{aligned}$$

再将各关于  $\frac{R}{r}$  的导数分别求出, 代入式(4.6)后得出挠度方程(4.1)的齐次方程为

$$R\Phi^{(4)} + 2A\Phi'' + B\Phi = 0 \quad (4.7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= R''r^2 + R'r + R \\ B &= R^{(4)}r^4 + 6R^{(3)}r^3 + 5R''r^2 - R'r + R \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

可用分离变量得出式(4.7)的另一形式:

$$\Phi^{(4)} + 2 \frac{A}{R} R'' + \frac{B}{R} R = 0$$

再对上式求  $r$  的偏导数, 为

$$2\left(\frac{A}{R}\right)' \Phi'' + \left(\frac{B}{R}\right)' \Phi = 0 \quad (4.9)$$

以下将分别考察  $\left(\frac{A}{R}\right)' \neq 0$  和  $\left(\frac{A}{R}\right)' = 0$  两种情形。

$$(1) \left(\frac{A}{R}\right)' \neq 0$$

用  $2\left(\frac{A}{R}\right)' \Phi$  除以式(4.9), 得

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = - \frac{\left(\frac{B}{R}\right)'}{2\left(\frac{A}{R}\right)'} = -\lambda^2$$

式中,  $\lambda$  为一常数。这样可得分离变量后两个方程

$$\left. \begin{aligned} \Phi'' + \lambda^2 \Phi &= 0 \\ \left(\frac{B}{R}\right)' - 2\lambda^2 \left(\frac{A}{R}\right)' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

式(4.10)中第一式通解为

$$\Phi = D_{a1} \cos \lambda \theta + D_{a2} \sin \lambda \theta \quad (4.11)$$

将式(4.11)代入式(4.7)得

$$R\lambda^4 - 2A\lambda^2 + B = 0$$

而将  $A$  和  $B$  的表达式代入上式后得

$$R^{(4)}r^4 + 6R^{(3)}r^3 + (5 - 2\lambda^2)R''r^2 - (1 + 2\lambda^2)R'r + (1 - \lambda^2)^2R = 0 \quad (4.12)$$

如果  $R$  有多项式的解, 并有

$$R = r^n$$

代入式(4.12), 然后除  $r^n$ , 化简后得辅助方程

$$n^4 - 2(\lambda^2 + 1)n^2 + (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \quad (4.13)$$

其四个根为

$$\begin{aligned} n_1 &= \lambda + 1 & n_2 &= \lambda - 1 \\ n_3 &= -\lambda + 1 & n_4 &= -\lambda - 1 \end{aligned}$$

我们使  $\lambda$  等于一些正整数, 下面考察 1)  $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1; 2) \lambda = 0; 3) \lambda = 1$  三种情形。

1)  $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ , 则式(4.13)中没有重根, 式(4.12)的解为

$$R = C_{a1}r^{\lambda+1} + C_{a2}r^{\lambda-1} + C_{a3}r^{-\lambda+1} + C_{a4}r^{-\lambda-1}$$

式中,  $C_{a4}$  是任意常数,  $\lambda = 2, 3, 4, \dots$ , 这时获得关于  $w$  的解为

$$w = \sum_{\lambda=2}^n [C_{a1}r^{\lambda+2} + C_{a2}r^{\lambda} + C_{a3}r^{-\lambda+2} + C_{a4}r^{-\lambda}] (D_{a1} \cos \lambda \theta + D_{a2} \sin \lambda \theta) \quad (4.14)$$

2)  $\lambda=0$ , 则式(4.10)成为  $\Phi''=0$ , 其解为

$$\Phi = D_{01}\theta + D_{02}$$

对应的式(4.13)会有重根

$$n_1 = n_3 = 1 \quad n_2 = n_4 = -1$$

式(4.12)的通解为

$$R = C_{01}r + C_{02}r\ln r + C_{03}\frac{1}{r} + C_{04}\frac{1}{r}\ln r$$

此时的挠度  $w$  表示为

$$w = (C_{01}r^2 + C_{02}r^2\ln r + C_{03} + C_{04}\ln r)(D_{01}\theta + D_{02}) \quad (4.15)$$

3)  $\lambda=1$ , 从式(4.10)中得

$$\Phi = D_{11}\cos\theta + D_{12}\sin\theta$$

再从式(4.12)中求方程的根为

$$n_1 = 2 \quad n_4 = -2 \quad n_2 = n_3 = 0$$

求出  $R$  为

$$R = C_{11}r^2 + C_{12}\frac{1}{r^2} + C_{13} + C_{14}\ln r$$

此时的挠度  $w$  表示为

$$w = (C_{11}r^3 + C_{12}\frac{1}{r} + C_{13}r + C_{14}r\ln r)(D_{11}\cos\theta + D_{12}\sin\theta) \quad (4.16)$$

$$(2) \left(\frac{A}{R}\right)' = 0$$

此时得  $A=C_1R$ , 此处  $C_1$  为任意常数。由式(4.10)可求出  $B=C_2R$ , 对应的关于  $\Phi$  的方程为

$$\Phi^{(4)} + 2C_1\Phi'' + C_2\Phi = 0 \quad (4.17)$$

并列关于  $A, B$  与  $r$  的关系式(4.18), 得出

$$\left. \begin{aligned} R''r^2 + R'r + (1 - C_1)R &= 0 \\ R^{(4)}r^4 + 6R^{(3)}r^3 + 5R''r^2 - R'r + (1 - C_2)R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

我们要配适当的  $C_1$  和  $C_2$ , 使上列二式有共同的解。现设有多项式  $R=r^n$  之解, 代入式(4.18)中, 有特征方程

$$(n^2 + 1) = C_1 \quad (n^2 - 1)^2 = C_2$$

由此得出

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(4)} + 2(n^2 + 1)\Phi'' + (n^2 - 1)^2\Phi &= 0 \\ R''r^2 + R'r - n^2R &= 0 \\ R^{(4)}r^4 + 6R^{(3)}r^3 + 5R''r^2 - R'r + [1 - (n^2 - 1)^2]R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

实际上, 下列两个解均满足式(4.19)中后两式

$$R = r^n \quad R = r^{-n}$$

所以可以写出

$$R = C_{n1}r^n + C_{n2}r^{-n}$$

再来求解式(4.19)中第一式,特征方程为

$$\begin{aligned} n^4 + 2(\lambda^2 + 1)n^2 + (\lambda^2 - 1)^2 &= 0 \\ n &= \pm (\lambda + 1)i \end{aligned} \quad (4.20)$$

现分以下三种情况计算:

1)  $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ , 由式(4.20)定出  $\lambda$  的 4 个根, 得出  $\Phi$  为

$$\Phi = D_{11}\cos(\lambda + 1)\theta + D_{12}\sin(\lambda + 1)\theta + D_{13}\cos(\lambda - 1)\theta + D_{14}\sin(\lambda - 1)\theta$$

挠度函数为

$$\begin{aligned} w = \sum_{k=2}^n (C_{k1}r^k + C_{k2}r^{-k}) [D_{11}\cos(\lambda + 1)\theta + D_{12}\sin(\lambda + 1)\theta \\ + D_{13}\cos(\lambda - 1)\theta + D_{14}\sin(\lambda - 1)\theta] \end{aligned} \quad (4.21)$$

2)  $\lambda = 0$ , 则有  $r^\lambda = r^{-\lambda} = 1$ ,  $R$  及  $\Phi$  分别是

$$\begin{aligned} R &= C_{01} + C_{02}\ln r \\ \Phi^{(4)} + 2\Phi^{(2)} + \Phi &= 0 \end{aligned}$$

其特征方程为

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Phi = D_{01}\cos\theta + D_{02}\sin\theta + D_{03}\theta\cos\theta + D_{04}\theta\sin\theta$$

挠度函数  $w$  表示为

$$w = (C_{01}r + C_{02}r\ln r)(D_{01}\cos\theta + D_{02}\sin\theta + D_{03}\theta\cos\theta + D_{04}\theta\sin\theta)$$

将它与式(4.16)相比较, 仅有新的解为

$$w = (C_{01}r + C_{02}r\ln r)(D_{03}\theta\cos\theta + D_{04}\theta\sin\theta) \quad (4.22)$$

3)  $\lambda = 1$ ,  $R$  及  $\Phi$  分别是

$$\begin{aligned} R &= C_{11}r + C_{12}\frac{1}{r} \\ \Phi^{(4)} + 4\Phi'' &= 0 \end{aligned}$$

对应的挠度函数为

$$w = (C_{11}r^2 + C_{12})(D_{11}\cos 2\theta + D_{12}\sin 2\theta + D_{13}\theta + D_{14}) \quad (4.23)$$

就这样, 我们获得了柱坐标下满足平衡方程(4.2)的齐次式的板的一般解。可以重新写为

$$w = w_{01} + w_{02} + w_{11} + w_{21} + w_{10} + w_{20} + w_{14} + w_{24}$$

其中

$$\begin{aligned} w_{01} &= C_{01}r^2 + C_{02}r^2\ln r + C_{03} + C_{04}\ln r \\ w_{02} &= (C'_{01}r^2 + C'_{02}r^2\ln r + C'_{03} + C'_{04}\ln r)\theta \\ w_{11} &= (C_{11}r^3 + C_{12}\frac{1}{r} + C_{13}r + C_{14}r\ln r)\cos\theta \\ w_{21} &= (C'_{11}r^3 + C'_{12}\frac{1}{r} + C'_{13}r + C'_{14}r\ln r)\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{10} &= (C_{10}r + C_{20}r \ln r) \theta \cos \theta \\
w_{20} &= (C'_{10}r + C'_{20}r \ln r) \theta \sin \theta \\
w_{1\lambda} &= \sum_{\lambda=2}^n (C_{\lambda 1}r^{\lambda+2} + C_{\lambda 2}r^{\lambda} + C_{\lambda 3}r^{\lambda-2} + C_{\lambda 4}r^{-\lambda}) \cos \lambda \theta \\
w_{2\lambda} &= \sum_{\lambda=2}^n (C'_{\lambda 1}r^{\lambda+2} + C'_{\lambda 2}r^{\lambda} + C'_{\lambda 3}r^{\lambda-2} + C'_{\lambda 4}r^{-\lambda}) \sin \lambda \theta \quad (4.24)
\end{aligned}$$

而在圆形板中,由外荷载  $q$  引起的式(4.2)的特解,可由以上齐次解的形式,将  $q$  做相应的傅里叶展开获得特解或直接从通解形式估计出一个特解。再与式(4.24)中某部分组成的板的齐次解相加,即为柱坐标下板弯曲的全解。

在求出板的挠度之后,对混凝土等工程材料的圆形、环形板,可由式(4.3)给出弯矩和剪力。

值得指出的是,式(4.24)是各种荷载  $q$  作用下的一般解,对具体的某种板与某种荷载,仅选择其中的部分函数作为其挠度表达式即可。

1) 结构与荷载均为轴对称,即与角度坐标  $\theta$  无关的情况。这时板的挠度  $w$  可仅取式(4.24)中第一项  $w_{01}$  为通解。由荷载  $q$  按其表达式给出特解,两者相加,再由板的边界条件求出各系数  $C_{01}$ 、 $C_{02}$  等。

如周边受纯弯矩的圆形板,挠度  $w$  的一般式为

$$w = C_{01}r^2 + C_{03}$$

如边界条件为外周边简支、内周边自由,内周边受有弯矩  $M$  和横向剪力  $P$  作用的环形板,其挠度  $w$  的具体式为

$$\begin{aligned}
w &= -\frac{Mb^2}{2D(R^2 - b^2)}(R^2 - r^2) + \frac{R^2b^2M}{D(R^2 - b^2)} \ln \frac{r}{R} \\
&\quad + \frac{Pb}{4D} \left[ \frac{3}{2}(R^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{R} \right]
\end{aligned}$$

式中,  $R$  表示外半径;  $b$  表示内半径。

2) 轴对称圆形板结构,但受有与  $\theta$  有关的荷载  $q(\theta)$ 。此时应在式(4.24)中选择与该  $\theta$  有关的对应挠度函数  $w$ ,再由边界条件确定其中各系数。

例如周边铰支圆形板,半径为  $R$ 。板上受有  $q = \frac{q_1}{R} r \cos \theta$  的荷载,  $q_1$  为分布荷载最大值。这时要选择式(4.24)中第三项  $w_{11}$ ,加上非齐次方程一个特解后,  $w$  为

$$w = \left( C_{11}r^3 + C_{12} \frac{1}{r} + C_{13}r + C_{14}r \ln r \right) \cos \theta + \frac{q_1 r^5 \cos \theta}{192RD}$$

利用周边简支边界条件确定上式中  $C_{11}$ 、 $C_{12}$ 、 $C_{13}$ 、 $C_{14}$  系数后,得

$$w = \frac{q_1 R^4}{192D} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{r}{R} \cos \theta$$

3) 均匀荷载作用下的非轴对称圆形板结构。例如有图 4.1 所示径向铰支的扇形板及半圆板等。由边界条件  $\theta=0$  时  $w=0$  及  $\theta=\theta_0$  时  $w=0$ ,以及周边的  $M_\theta=0$

条件,从式(4.24)中选最后一项

$$w_{2\lambda} = \sum_{\lambda=2}^n (C_{\lambda 1} r^{\lambda+2} + C_{\lambda 2} r^{\lambda} + C_{\lambda 3} r^{-\lambda+2} + C_{\lambda 4} r^{-\lambda}) \sin \lambda \theta$$

将常数荷载  $q$  按  $\sin \lambda \theta$  展开,比较式(4.2)两边展开式系数,并利用边界条件确定出挠度  $w$  为

$$\begin{aligned} w = & \frac{qR^4}{D} \sum_{\lambda=2}^n \left\{ \frac{4r^4}{R^4} - \frac{1}{\lambda\pi(16-\lambda^2)(4-\lambda^2)} \right. \\ & + \frac{r^{\lambda}}{R^{\lambda}} \cdot \frac{\lambda+5}{\lambda\pi(16-\lambda^2)(2+\lambda)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ & \left. - \frac{r^{\lambda+2}}{R^{\lambda+2}} \cdot \frac{\lambda+3}{\lambda\pi(4+\lambda)(4-\lambda^2)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \right\} \sin \lambda \theta \end{aligned}$$

式中,  $\lambda$  从  $\lambda = \frac{\pi}{\theta_0}$  开始。

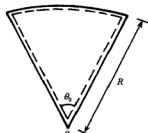


图 4.1 周边简支扇形板

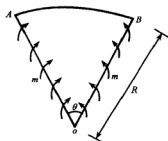


图 4.2 径向受弯矩  $m$  作用的扇形板

4) 两径向边有均匀分布弯矩  $m$  作用的扇形板。如有图 4.2 所示的半径为  $R$ 、夹角为  $\theta$  的径向有均匀分布弯矩  $m$  作用的扇形板。这是过去被认为难以求解的问题。这里可采用比拟法。由弹性力学中平面楔体边界受拉压力的量纲分析可知,该平面问题具有  $f=r^2\Phi(\theta)$  的应力函数解答并且解答是完备的。按比拟方法分析,这里给出的边界上的条件为均匀分布弯矩  $m$ ,取混凝土工程材料  $\mu=0$ ,得

$$M_{\theta} = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = m$$

按量纲  $M_{\theta}$  与  $w$  之关系,考虑挠度函数应为  $r^2 f(\theta)$  的一般式,由式(4.24)中可选出

$$f(\theta) = A \cos 2\theta + B \sin 2\theta + C\theta + E$$

因而有挠度式

$$w = r^2 (A \cos 2\theta + B \sin 2\theta + C\theta + E)$$

利用周边铰支边界条件,可以确定  $w$  中的 4 个常数。为方便计算,我们可选角度在



$\frac{\theta_0}{2}$ 处量起,这样由于对称性, $B=C=0$ ,而  $w$  最后取为

$$w = \frac{mr^2}{4D} \left( \frac{\cos 2\varphi}{\cos \theta_0} - 1 \right)$$

本节的挠度分析不局限于混凝土材料。 $\mu \neq 0$  的挠度与内力式可参阅有关板壳理论书籍。另外 4) 中提出类比于弹性力学极坐标平面问题的各种解答,利用量纲分析进行圆板计算也有普遍意义。由式(4.24)的一般解进行适当组合,还可以求出其他与  $r$  及  $\theta$  有关的圆形扇形板的弯曲问题。在获得板的挠度表达式基础上,再由内力与挠度微分关系式,由挠度求出板中的内力。

## 4.2 弹性地基柱坐标下圆形板的解<sup>1)</sup>

设有弹性地基(其模数为  $K$ )的圆形、环形板,如果该板用柱坐标求解,其挠度  $w(r, \theta)$  的方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{Kw}{D} = \frac{q}{D} \quad (4.25)$$

式中,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  为板的抗弯刚度;  $q$  为板承受的荷载;  $h$  为板厚。

显然式(4.25)的非齐次方程的解可由该方程的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解所组成。由于齐次方程的通解按照荷载  $q$  的受力形式而采用不同的函数,非齐次方程的特解依赖于通解形式,所以分析和求解式(4.25)中的齐次方程是关键。如果圆形板结构与荷载  $q$  是轴对称的,那么式(4.25)中的齐次方程表示为

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{K}{D} w = 0 \quad (4.26)$$

式中,  $w = w(r)$ , 即  $w$  仅为  $r$  坐标的函数。

引入记号

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{K}} \quad \zeta = \frac{r}{l}$$

则式(4.26)可写成

$$\left[ \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \right) + i \right] \left[ \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \right) - i \right] w = 0 \quad (4.27)$$

这是两个共轭形式的零阶轴对称 Bessel 方程,它的解可以写成 4 个零阶的 Tomson 函数。先表达成关于  $\zeta$  的共轭形式零阶 Bessel 函数和 Hankel 函数

1) 贾乃文等,弹性地基上环形板基础的设计,土工基础,1999年2期

$$w = A_1 J_0(\zeta j) + A_2 H_0(\zeta j) + A_3 J_0(\zeta j^3) + A_4 H_0(\zeta j^3) \quad (4.28)$$

式中,  $j = \sqrt{i}$ 。因为  $\zeta$  为实数,  $w$  亦为实数, 引入实函数的多项式表达的 Tomson 函数, 有

$$\left. \begin{aligned} J_0(\zeta j) &= \text{ber}(\zeta) + i\text{bei}(\zeta) \\ J_0(\zeta j^3) &= \text{ber}(\zeta) - i\text{bei}(\zeta) \\ H_0(\zeta j) &= \text{ker}(\zeta) + i\text{kei}(\zeta) \\ H_0(\zeta j^3) &= -[\text{kei}(\zeta) - i\text{ker}(\zeta)] \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

由此获得由待定实常数  $C_i$  与 Tomson 函数表示的齐次方程的解为

$$w(\zeta) = C_1 \text{ber}(\zeta) + C_2 \text{bei}(\zeta) + C_3 \text{ker}(\zeta) + C_4 \text{kei}(\zeta) \quad (4.30)$$

Tomson 函数及它们的导数的多项式表达见本节附录。

式(4.25)不难由外荷载  $q$  的形式寻找到它的一个特解, 再与式(4.30)相加, 即会获得弹性地基上轴对称圆形板的全解。将全解挠度表示为  $\bar{w}$ , 式中的 4 个待定积分常数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  由边界条件加以确定。如果考虑圆形板的泊松比  $\mu = 0$ , 例如混凝土等工程材料, 那么由挠度通过简化微分关系可求得板中弯矩:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{D}{l^2} \frac{d^2 \bar{w}}{d\zeta^2} & V_r &= -\frac{D}{l} \frac{d}{d\zeta} \nabla^2 \bar{w} \\ M_\theta &= -D \left( \frac{1}{l^2 \zeta} \frac{d\bar{w}}{d\zeta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

在用挠度求弯矩时, 要用到 Tomson 函数的递推关系, 它们是

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}''(\zeta) &= -\text{bei}(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \text{ber}'(\zeta) \\ \text{bei}''(\zeta) &= \text{ber}(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \text{bei}'(\zeta) \\ \text{ker}''(\zeta) &= -\text{ker}(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \text{kei}'(\zeta) \\ \text{kei}''(\zeta) &= \text{ker}(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \text{kei}'(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

对于轴对称圆形板, 在圆心  $r=0$  处有两个限制条件, 即

$$\left. \begin{aligned} (\bar{w})_{\zeta=0} &= \text{有限值} \\ \int_0^{2\pi} (V_r r d\theta) \Big|_{\zeta=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

式中,  $V_r$  表示板中横向剪力, 可以获得式(4.30)中  $C_3 = C_4 = 0$ , 这样就将  $\bar{w}$  简化成有两个待定常数的解。仅在环形板轴对称条件下, 需用内外周边 4 个边界条件确定式(4.30)中 4 个待定常数。

非轴对称荷载作用下的圆形板可用  $n$  阶 Tomson 函数求解。设有弹性地基上非轴对称荷载作用下圆形板, 其挠度与荷载  $q$  的形式有关。如果荷载  $q(r, \theta)$  能表达成关于  $\theta$  的一次函数式, 那么式(4.25)的齐次方程通解可表示为  $w(r, \theta) =$

$R(r) \cdot \theta$ , 这时齐次方程关于  $R(r)$  是轴对称形式的解。这里的  $R$  与式(4.30)中的  $w$  有相同的表达, 这是用分离变量将它简化成轴对称弹性地板的一种特殊情况。

一般地, 如果荷载  $q(r, \theta)$  是  $\cos n\theta$  或  $\sin n\theta$  的一次函数式, 那么我们可以用分离变量式求解挠度。如设

$$q(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(r) \cos n\theta \quad (4.34)$$

我们可取

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r) \cos n\theta \quad (4.35)$$

将式(4.35)代入式(4.25)中的齐次方程, 引入记号

$$l = 4\sqrt{\frac{D}{K}} \quad \zeta = \frac{r}{l}$$

关于  $w_n$  的通解方程为

$$\left[ \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{n^2}{\zeta^2} \right) + i \right] \left[ \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{n^2}{\zeta^2} \right) - i \right] w_n = 0 \quad (4.36)$$

显然, 这是两个共轭的  $n$  阶 Bessel 方程。它有  $n$  阶 Bessel 函数和  $n$  阶 Hankel 函数形式的解, 利用  $n$  阶 Bessel 函数与  $n$  阶 Hankel 函数和 Tomson 函数的关系知

$$\begin{aligned} J_n(\zeta \sqrt{i}) &= (-1)^n [\text{ber}_n(\zeta) - i \text{bei}_n(\zeta)] \\ H_n(\zeta \sqrt{i}) &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{\pi} [\text{kei}_n(\zeta) + i \text{ker}_n(\zeta)] \end{aligned} \quad (4.37)$$

由此得出齐次方程中  $w_n(\zeta)$  为

$$w_n(\zeta) = C_{1n} \text{ber}_n(\zeta) + C_{2n} \text{bei}_n(\zeta) + C_{3n} \text{ker}_n(\zeta) + C_{4n} \text{kei}_n(\zeta) \quad (4.38)$$

$n$  阶 Tomson 函数存在如下降阶关系:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}_{n+1}(\zeta) &= -\frac{n\sqrt{2}}{\zeta} [\text{ber}_n(\zeta) - \text{bei}_n(\zeta)] - \text{ber}_{n-1}(\zeta) \\ \text{bei}_{n+1}(\zeta) &= -\frac{n\sqrt{2}}{\zeta} [\text{ber}_n(\zeta) + \text{bei}_n(\zeta)] - \text{bei}_{n-1}(\zeta) \\ \text{ker}_{n+1}(\zeta) &= -\frac{n\sqrt{2}}{\zeta} [\text{ker}_n(\zeta) - \text{kei}_n(\zeta)] - \text{ker}_{n-1}(\zeta) \\ \text{kei}_{n+1}(\zeta) &= -\frac{n\sqrt{2}}{\zeta} [\text{ker}_n(\zeta) + \text{kei}_n(\zeta)] - \text{kei}_{n-1}(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

这样可以将式(4.38)中的各  $n$  阶 Tomson 函数用零阶 Tomson 函数  $\text{ber}(\zeta)$ 、 $\text{bei}(\zeta)$ 、 $\text{ker}(\zeta)$ 、 $\text{kei}(\zeta)$  以及它们的一次导数  $\text{ber}'(\zeta)$ 、 $\text{bei}'(\zeta)$ 、 $\text{ker}'(\zeta)$ 、 $\text{kei}'(\zeta)$  表达出来, 而零阶 Tomson 函数以及它们的一次导数式的多项式表达见本节附录。

将式(4.34)表达的荷载  $q(r, \theta)$  代入式(4.25), 找出一个特解, 再与式(4.38)

相加,即为弹性地基上圆形板全解形式挠度  $\bar{w}(r, \theta)$ 。利用边界条件确定 4 个积分常数后,获得挠度  $\bar{w}(r, \theta)$  的解。再利用板中挠度与弯矩之关系,求出圆板中弯矩。如果令泊松比  $\mu=0$ ,则有  $\bar{w}(\zeta, \theta)$  与  $\zeta, \theta$  弯矩微分关系:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{D}{l^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \zeta^2} \\ M_\theta &= -\frac{D}{l^2} \left( \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) \\ M_{r\theta} &= -\frac{D}{l^2} \left( \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \zeta \partial \theta} - \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

下面讨论弹性地基柱坐标表达圆形板的挠度的更一般形式的解法。

考察式(4.25)的齐次式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{K}{D} w = 0 \quad (4.41)$$

引用记号  $\zeta$ , 式(4.41)表达为

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right) + \bar{w} = 0 \quad (4.42)$$

为了给出式(4.42)的一般式解答,这里我们用分离变量函数,即设  $w(\zeta, \theta)$  为

$$w(\zeta, \theta) = \zeta R(\zeta) \Phi(\theta) \quad (4.43)$$

式中,  $R$  仅为  $\zeta$  的函数,  $\Phi$  仅为角度  $\theta$  的函数,  $\zeta$  是为以后运算方便而引入的。

将式(4.43)代入式(4.42),进行微分运算,略去详细的推导过程,我们得

$$R\Phi^{(4)} + 2A\Phi'' + B\Phi + \zeta R\Phi = 0 \quad (4.44)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= R''\zeta^2 + R'\zeta + R \\ B &= R^{(4)}\zeta^4 + 6R^{(3)}\zeta^3 + 5R''\zeta^2 - R'\zeta + R \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

超过 2 的导数用括号(3)、(4)表示。

将式(4.44)两边同除  $R$ , 进行变量分离后, 再对  $\zeta$  求导数, 则式(4.44)改写成有利于分析的形式:

$$2\left(\frac{A}{R}\right)'\Phi'' + \left[\left(\frac{B}{R}\right)' + 1\right]\Phi = 0 \quad (4.46)$$

求解式(4.46)的齐次方程, 如果  $\left(\frac{A}{R}\right)' \neq 0$ , 用  $2\left(\frac{A}{R}\right)'$  同除上式两边, 得

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{\left[\left(\frac{B}{R}\right)' + 1\right]}{2\left(\frac{A}{R}\right)'} = -\lambda^2 \quad (4.47)$$

式中,  $\lambda$  为一常数。于是有分离变量的两个方程

$$\left. \begin{aligned} \Phi'' + \lambda^2 \Phi &= 0 \\ \left[ \left( \frac{B}{R} \right)' + 1 \right] - 2\lambda^2 \left( \frac{A}{R} \right)' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

我们令  $\lambda$  为一些正整数去求解式(4.48), 分别考虑  $\lambda=0, \lambda=1$  以及  $\lambda \geq 2$  几种情况。

(1)  $\lambda=0$

由式(4.48)中第一个方程直接求出  $\Phi$  为

$$\Phi = (D_{01}\theta + D_{02})$$

再由式(4.48)中第二式组成  $\zeta R$  函数关于  $\zeta$  的零阶 Bessel 方程

$$\left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \right) \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \right) (\zeta R) + (\zeta R) = 0 \quad (4.49)$$

由此, 按本节中的分析可解出  $R(\zeta)$  用零阶 Tomson 函数表达的公式

$$\zeta R(\zeta) = C_{01}\text{ber}(\zeta) + C_{02}\text{bei}(\zeta) + C_{03}\text{ker}(\zeta) + C_{04}\text{kei}(\zeta)$$

而这种情况下挠度一般解为

$$w(\zeta, \theta) = [C_{01}\text{ber}(\zeta) + C_{02}\text{bei}(\zeta) + C_{03}\text{ker}(\zeta) + C_{04}\text{kei}(\zeta)](D_{01}\theta + D_{02}) \quad (4.50)$$

(2)  $\lambda=1$

由式(4.48)中第一个方程直接求出  $\Phi$  为

$$\Phi = (D_{11}\cos\theta + D_{12}\sin\theta)$$

再由该式中第二式组成  $\zeta R$  函数关于  $\zeta$  的一阶 Bessel 方程:

$$\left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} \right) \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} \right) (\zeta R) + (\zeta R) = 0 \quad (4.51)$$

由此解出  $\zeta R$  用一阶 Tomson 函数表达的公式

$$\zeta R(\zeta) = C_{11}\text{ber}_1(\zeta) + C_{12}\text{bei}_1(\zeta) + C_{13}\text{ker}_1(\zeta) + C_{14}\text{kei}_1(\zeta)$$

这种情况下挠度的一般解为

$$\begin{aligned} \bar{w}(\zeta, \theta) = & [C_{11}\text{ber}_1(\zeta) + C_{12}\text{bei}_1(\zeta) + C_{13}\text{ker}_1(\zeta) + C_{14}\text{kei}_1(\zeta)] \\ & \cdot (D_{11}\cos\theta + D_{12}\sin\theta) \end{aligned} \quad (4.52)$$

(3)  $\lambda=n$  ( $n \geq 2$ )

由式(4.48)中第一个方程直接求出  $\Phi$  的第  $n$  项:

$$\Phi_n = (D_{n1}\cos n\theta + D_{n2}\sin n\theta)$$

再由该式中第二个方程组成  $\zeta R$  函数关于  $\zeta$  的  $n$  阶 Bessel 方程

$$\left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{n^2}{\zeta^2} \right) \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{n^2}{\zeta^2} \right) (\zeta R) + (\zeta R) = 0 \quad (4.53)$$

由此解出  $\zeta R$  用  $n$  阶 Tomson 函数表达的公式第  $n$  项为

$$[\zeta R(\zeta)]_n = C_{n1}\text{ber}_n(\zeta) + C_{n2}\text{bei}_n(\zeta) + C_{n3}\text{ker}_n(\zeta) + C_{n4}\text{kei}_n(\zeta)$$

这种情况下挠度的一般解为

$$w(\zeta, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} [C_{n1} \text{ber}_n(\zeta) + C_{n2} \text{bei}_n(\zeta) + C_{n3} \text{ker}_n(\zeta) + C_{n4} \text{kei}_n(\zeta)] \cdot (D_{n1} \cos n\theta + D_{n2} \sin n\theta) \quad (4.54)$$

以上各式中,  $C_{ij}$ 、 $D_{ij}$  等均为常数。

显然, 这些一般性的弹性地基柱坐标表达的圆形板的挠度解包含有本节中先前讨论的内容。如轴对称问题的解可由式(4.49)给出,  $q(r, \theta)$  表达成  $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$  形式的解可由式(4.54)给出。

若  $\left(\frac{A}{R}\right)' = 0$ , 显然  $A = C_1 R$ , 将  $A$  代入式(4.46), 得出  $B = -\zeta R + C_2 R$ , 其中  $C_1$  与  $C_2$  都是常数。再将  $A$  和  $B$  代入式(4.44), 得出关于  $\Phi$  的方程:

$$\Phi^{(4)} + 2C_1 \Phi'' + C_2 \Phi = 0 \quad (4.55)$$

由于  $C_1$  与  $C_2$  是任选的常数, 当  $C_1$  与  $C_2$  不同时为 1 时, 所得的关于  $\Phi$  的表达式与  $\left(\frac{A}{R}\right)' \neq 0$  时相同, 不增加新的挠度解。若  $C_1 = C_2 = 1$ , 则由式(4.55)可以解出

$$\Phi = D_{01} \cos\theta + D_{02} \sin\theta + D_{03} \theta \cos\theta + D_{04} \theta \sin\theta \quad (4.56)$$

再将  $C_1$ 、 $C_2$  与  $A$ 、 $B$  之关系代入式(4.45), 要求同时满足这两个公式, 得出  $\zeta R(\zeta)$  为一阶 Tomson 函数, 即

$$\zeta R(\zeta) = C_{01} \text{bei}_1(\zeta) + C_{02} \text{kei}_1(\zeta)$$

这样, 去掉相同的挠度项, 全解中还应补充  $w(\zeta, \theta)$  项, 即

$$w(\zeta, \theta) = [C_{01} \text{bei}_1(\zeta) + C_{02} \text{kei}_1(\zeta)] (D_{03} \theta \cos\theta + D_{04} \theta \sin\theta) \quad (4.57)$$

综合式(4.50)、(4.52)、(4.54)、(4.57)即为用分离变量法求解弹性地基上柱坐标圆形板的挠度表达的式(4.41)齐次方程的一般解。

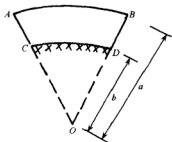


图 4.3 弹性地基扇形板

根据荷载  $q$  的形式, 选择幂级数或其他合适的函数, 求出式(4.25)非齐次方程的一个特解, 再将通解与特解相加, 获得弹性地基柱坐标表达的圆形板挠度全解。

**例题 4.1** 求图 4.3 所示弹性地基扇形板的内力和挠度。

设有图 4.3 所示的弹性地基上的扇形板 ABCD, 板厚为 25cm, 地基模数  $K = 50 \text{ N/cm}^3$ , 外荷载与  $\theta$  无关,  $q = \frac{r}{a} q_0$ , 并  $q_0 = 140 \text{ kN/m}^2$ ,  $E =$

$2.6 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ 。

**解** 由本节中轴对称解或由式(4.50)找出  $w(\zeta, \theta)$  与  $\theta$  无关的表达式, 并计入非齐次挠度方程一个特解  $\frac{\zeta t}{aK} q_0$ , 得出  $\bar{w}(\zeta)$  为

$$\bar{w}(\zeta) = (1 - 0.0156\zeta^4)C_1 - 0.25\zeta^2 C_2$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 1 - 0.0156\zeta^4 + 0.06\zeta^2 + 0.13\zeta^2 \ln \frac{\zeta}{2} \right) C_3 \\
& + \left( 0.4 + 0.7 \ln \frac{\zeta}{2} - 0.25\zeta^2 - 0.009\zeta^4 - 0.11\zeta^4 \ln \frac{\zeta}{2} \right) C_4 \\
& + 0.003 \frac{\zeta}{a}
\end{aligned}$$

如果在扇形板边缘有边界条件

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad (V_r)_{r=a} = 0$$

$$(w)_{r=b} = 0 \quad \left( \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = 0$$

可以求出  $\bar{w}(\zeta)$  中的  $C_1, C_2, C_3, C_4$  常数。如果  $a=5.5\text{m}, b=5\text{m}$ , 可以求出

$$C_1 = 1.55 \times 10^{-4} \quad C_2 = 1.04 \times 10^{-4}$$

$$C_3 = -7.59 \times 10^{-4} \quad C_4 = 7.76 \times 10^{-4}$$

求出  $\bar{w}(\zeta)$ , 再由式 (4.31) 求出弯曲内力, 其最大值分别是

$$M_r = 24.8 \text{ kN} \cdot \text{m/m} \quad M_\theta = 8 \text{ kN} \cdot \text{m/m} \quad V_r = 13 \text{ kN/m}$$

#### 附录: 零阶和一阶 Tomson 函数多项式

$$\text{ber}(\zeta) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^8}{(4!)^2} - \dots$$

$$\text{ber}'(\zeta) = -\frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^7}{3!4!} - \dots$$

$$\text{bei}(\zeta) = \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^2}{(1)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$\text{bei}'(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta - \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^5}{2!3!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
\text{ker}(\zeta) &= \left( \ln \frac{2}{\zeta} - \nu \right) \text{ber}(\zeta) + \frac{\pi}{4} \text{bei}(\zeta) - \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^4}{(2!)^2} \\
&+ \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^8}{(4!)^2} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ker}'(\zeta) &= \left( \ln \frac{2}{\zeta} - \nu \right) \text{ber}'(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \text{ber}\zeta + \frac{\pi}{4} \text{bei}'(\zeta) - \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^3}{1!2!} \\
&+ \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{\left(\frac{1}{2}\zeta\right)^7}{3!4!} \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{kei}(\zeta) &= \left( \ln \frac{2}{\zeta} - \nu \right) \text{bei}(\zeta) - \frac{\pi}{4} \text{ber}(\zeta) + \frac{\left( \frac{1}{2} \zeta \right)^2}{(1!)^2} \\
&\quad - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\left( \frac{1}{2} \zeta \right)^6}{(3!)^2} + \dots \\
\text{kei}'(\zeta) &= \left( \ln \frac{2}{\zeta} - \nu \right) \text{bei}'(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \text{bei}(\zeta) - \frac{\pi}{4} \text{ber}'(\zeta) + \frac{1}{2} \zeta \\
&\quad - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\left( \frac{1}{2} \zeta \right)^5}{2!3!} + \dots
\end{aligned}$$

式中,常数  $\nu=0.5772\dots$

### 4.3 非线性大变形圆形板的精确解<sup>1)</sup>

在薄板小挠度弯曲理论中,当板面有横向荷载  $q(x,y)$  作用时,由于挠曲量  $w$  微小,中面弯曲时不变形,板内只有弯矩、扭矩及横向剪力  $V_x, V_y$ , 没有薄膜内力。

板大挠度弯曲变形时,则还要计入弯曲变形引起的板内薄膜内力,以及它们对挠度的反作用。大挠度变形问题属非线性变形,其一般公式为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.58)$$

引入平面应力函数  $\phi(x,y)$ , 用  $h$  表示板厚, 薄膜内力用应力函数表示为

$$\left. \begin{aligned} N_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ N_y &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ N_{xy} &= -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

薄板非线性大挠度弯曲公式用应力函数表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{h}{D} \left( \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

变形协调方程为

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \nu_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.61)$$

1) 贾乃文 等. 球扁壳结构内力计算的精确方法. 空间结构, 1998 年 1 期



引入应力函数  $\phi$  与应变之关系, 得出

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ \nu_{xy} &= -\frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

代入协调方程式(4.61)后, 得出薄板大挠度弯曲的另一方程

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (4.63)$$

这两个方程是由冯·卡门于1910年导出的, 是一组颇为难解的关于  $w, \phi$  的非线性方程。

将圆形板应用圆柱坐标表达, 将  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  用  $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$  代换;  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  用  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  代换;  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$  用  $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$  代换, 则可形成柱坐标下的圆形板大挠度方程:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{q(r, \theta)}{D} + \frac{h}{D} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = E \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (4.65)$$

从平面直角坐标到柱坐标平面表达的微分代换关系是由复合函数求导数, 并令整体坐标与局部坐标重合, 令  $\theta=0$  而得到的。

式(4.64)、(4.65)在轴对称条件时分别为

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \right] = \frac{q}{D} r + \frac{h}{D} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \frac{d\phi}{dr} \right) \quad (4.66)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} (\nabla^2 \phi) \right] = -\frac{E}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (4.67)$$

上面这一组非线性的两变量的方程组求解也颇为困难。这里给出一种精确的解法——步进求和法。它是将荷载  $q(r)$  分段逐步加到圆形薄板上; 每一步荷载作用下圆板处在小变形状态, 相应的前面的挠度作为该步加载前的初始挠度。这样在做每一步计算时可引用薄板的小挠度变形公式, 整个变形则是将各阶段结果求和。从而将微分方程化为代数方程, 获得非线性大变形圆形板的精确的挠度与内力。

第  $i$  步结束时, 各变量可表示为

$$w = W + w_i, \quad \phi = \Phi + \phi_i \quad (4.68)$$

其中前  $i-1$  步总值可以表示为

$$W = \sum_{k=0}^{i-1} w_k \quad \Phi = \sum_{k=0}^{i-1} \phi_k \quad (4.69)$$

由此推出第  $i$  步时的方程:

$$D \frac{d}{dr} [\nabla^2 w_i] = q_i + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw_i}{dr} + \frac{h}{r} \frac{d\phi_i}{dr} \left[ \frac{dW}{dr} + \frac{dw_i}{dr} \right] \quad (4.70)$$

$$\frac{d}{dr} [\nabla^2 \phi_i] = -\frac{E}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dw_i}{dr} \right)^2 + \frac{dW}{dr} \frac{dw_i}{dr} \right] \quad (4.71)$$

引入无量纲表达式

$$w^* = \frac{w_i}{h} \quad \rho = \frac{r}{a} \quad \phi^* = \frac{\phi_i}{Eh^2}$$

$$q_i^* = \frac{q_i}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^4 \quad W^* = \frac{W}{h} \quad \Phi^* = \frac{\Phi}{h}$$

式中,  $a$  为圆板半径。

在每一步荷载下取小挠度变形函数

$$w = w_0 \left( a - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \quad (4.72)$$

其无量纲形式为

$$w^* = \zeta_i (\alpha - \rho^2)^2 \quad \zeta_i = \frac{w_0}{h} \quad (4.73)$$

式中,  $\alpha$  是满足边界条件而设定的常数。由此式算出

$$\frac{dW}{d\rho} = - \sum_{k=0}^{i-1} 4\zeta_k \rho (\alpha - \rho^2)$$

$$\frac{dw^*}{d\rho} = - 4\zeta_i \rho (\alpha - \rho^2)$$

将这一结果代入控制方程第二式,得

$$\frac{d}{d\rho} (\nabla^2 \phi^*) = - 8\zeta_i^2 \rho (\alpha - \rho^2)^2 - 16\zeta_i \rho (\alpha - \rho^2) \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \quad (4.74)$$

计入算符  $\nabla^2$  ( ) 的表达,再对上式积分两次得

$$\frac{d\phi^*}{d\rho} = - \frac{\zeta_i^2}{6} \times \frac{1}{\rho} (\alpha - \rho^2)^4 - \frac{\zeta_i}{3} \times \frac{1}{\rho} (\alpha - \rho^2)^4 \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k + \frac{A_1}{2} \rho + \frac{A_2}{\rho}$$

如为圆形板,则有边界条件

$$\left[ \frac{1}{\rho} \times \frac{d\phi^*}{d\rho} \right]_{\rho=0} = \text{有限值}$$

从而得出  $A_2$  为

$$A_2 = \frac{\alpha^2}{6} (\zeta_i^2 \alpha + 2\alpha \zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k)$$

常数  $A_1$  则由板周边支承条件确定。

前  $i-1$  步的函数  $\phi^*$  的一阶导数不难由上式求出:

$$\frac{d\Phi^*}{d\rho} = M_1\rho + M_3\rho^3 + M_5\rho^5 + M_7\rho^7 \quad (4.75)$$

式中

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{j=0}^{i-1} m_{1j} = \sum_{j=0}^{i-1} \left[ \frac{1}{3} (2\zeta_j^2\alpha + 4\zeta_j\alpha \sum_{k=0}^{j-1} a_k) \alpha^2 + \frac{A_1}{2} \right] \\ M_3 &= \sum_{j=0}^{i-1} m_{3j} = \sum_{j=0}^{i-1} (-\zeta_j^2\alpha - 2\zeta_j\alpha \sum_{k=0}^{j-1} \zeta_k) \alpha \\ M_5 &= \sum_{j=0}^{i-1} m_{5j} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{3} (2\zeta_j^2\alpha + 4\zeta_j\alpha \sum_{k=0}^{j-1} \zeta_k) \\ M_7 &= \sum_{j=0}^{i-1} m_{7j} = \sum_{j=0}^{i-1} -\frac{1}{6} (\zeta_j^2 + 2\zeta_j \sum_{k=0}^{j-1} \zeta_k) \end{aligned}$$

将此表达式代入控制方程第一方程,则会得到荷载与挠度的第  $i$  步的公式。板受荷载为常数时,有

$$\begin{aligned} \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 w^*) &= \frac{1}{2} q^* \rho + \frac{1}{\rho} (M_1\rho + M_3\rho^3 + M_5\rho^5 + M_7\rho^7) \\ &\quad \cdot [-4\zeta_i\rho(\alpha - \rho^2)] + \frac{1}{\rho} (m_{1i}\rho + m_{3i}\rho^3 + m_{5i}\rho^5 + m_{7i}\rho^7) \\ &\quad \cdot \left[ -\sum_{k=0}^{i-1} 4\zeta_k\rho(\alpha - \rho^2) - 4\zeta_i\rho(\alpha - \rho^2) \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

积分上式,注意到以下边界条件无量纲式:

$$\begin{aligned} \rho &= 0 & w^* &= a^2\zeta_i \\ \rho^2 &= \alpha & w^* &= 0 \\ \rho &= 1 & \frac{dw^*}{d\rho} &= -4\zeta_i(\alpha - 1) \end{aligned}$$

可以求出每一步变形下,最大挠度  $\zeta_i$  与荷载增量  $q^*$  之关系。如果圆板周边是夹支的,即  $\alpha=1$ ,则有

$$\begin{aligned} q^* &= \frac{16}{3(1-\mu^2)} \zeta_i + \lambda_1 \zeta_i^3 + \lambda_2 \zeta_i^2 \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k + \lambda_1 \zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k^2 \\ &\quad + \lambda_2 \zeta_i \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \sum_{k=0}^{j-1} \zeta_k + \lambda_1 \zeta_i^2 \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k + \lambda_2 \zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \sum_{j=0}^{k-1} \zeta_j \end{aligned} \quad (4.77)$$

式中,  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  分别为与泊松比  $\mu$  有关的量。在小变形条件下,每步的荷载与挠度都很小,故  $\zeta_i^2$ 、 $\zeta_i^3$  均属高阶小量,可以略去。再对上式两边取前  $i$  项之和,利用求和公式

$$\begin{aligned} \sum_0^i q^* &= Q & \sum_0^i \zeta_i &= \zeta & \sum_0^i \zeta_i \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j &= \frac{1}{2} \zeta^2 \\ \sum_0^i \zeta_i \left( \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^2 &= \frac{1}{3} \zeta^3 & \sum_0^i \zeta_i \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \sum_{k=0}^{j-1} \zeta_k &= \frac{1}{6} \zeta^3 \end{aligned}$$

最后得出关于  $\zeta$  的三次代数方程

$$B_3 \zeta^3 + B_0 \zeta = Q \quad (4.78)$$

式中

$$B_0 = \frac{16}{3(1-\mu^2)} \quad B_3 = 0.5 \left( 3.92 + 1.5 \frac{1+\mu}{1-\mu} \right)$$

显然,在给定材料的  $\mu$  值以后,很容易求解出  $B_0$  和  $B_3$ 。再由圆形板的其他几何尺寸及物理常数  $a$ 、 $h$  及  $E$  等,求出  $Q$  值。上面三次代数方程很容易求解,获得  $\zeta$  值代入式(4.73),也就获得挠度变形  $w_i$  和总挠度  $w$ 。

而  $\phi$  函数是由式(4.75)积分而得,利用  $\zeta_i$  的各求和公式,并由边界条件确定相应的积分常数,再由  $w$  及  $\phi$  与内力公式,分别求出大挠度变形下的弯矩和薄膜内力为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\theta &= -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \\ V_r &= -D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \\ N_r &= \frac{h}{r} \frac{d\phi}{dr} \\ N_\theta &= h \frac{d^2 \phi}{dr^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

#### 4.4 圆形板的塑性极限分析

对圆形板等工程结构进行弹塑性分析,往往会遇到求解非线性方程的困难。基于变分理论的结构极限分析,则略去了非线性变形的求解“过程”,而直接采用一种极限状态,获得该“状态”的解。这种塑性极限状态的解分别由机动法和静力法去寻找极限荷载,从真实荷载的上限与下限逼近真实荷载。圆形板结构的塑性极限分析是比较简单的。

设有半径为  $a$ 、承受均布荷载  $q$  作用的薄圆板,分别用机动法与静力法求荷载  $q$  的极限值  $q_s$ 。

1) 如果圆形板周边是铰支的,从圆板受荷状态及边界条件分析,板中只能出现正弯矩。在圆心处有  $M_r = M_\theta$ ,板边处有  $M_r = 0 (r=a)$ 。所以可以判定在全板内  $M_\theta \geq M_r$ ,按 Tresca 屈服准则,必有  $M_\theta = M_s$ 。其中,  $M_s$  为板弯矩的屈服极限值,是与应力  $\sigma_s$  对应的板弯矩。

轴对称圆形板的平衡方程为

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = V_r \quad (4.80)$$

将  $M_\theta = M_i$  代入式(4.80)后得出屈服状态方程

$$r \frac{dM_r}{dr} + M_r = M_i - \frac{1}{2}qr^2$$

该方程通解为

$$M_r = M_i - \frac{1}{6}qr^2 + \frac{C}{r} \quad (4.81)$$

代入限制条件,即  $r=0$  时,  $M_r$  应有限值。可知必有  $C=0$ ,因而得出

$$M_r = M_i - \frac{1}{6}qr^2$$

再由  $r=a$  时,  $M_r=0$  的边界条件,确定出当全板进入塑性时的荷载,即塑性极限荷载  $q_i$  为

$$q_i = 6 \frac{M_i}{a^2}$$

以上解题方法称为静力法,即从静力平衡条件出发而求解的。以下还可用力法另行求解。

根据铰支周边的边界条件,设挠度速度的分布是中心为奇点的圆锥面破坏机构。挠度速度方程为

$$\dot{w} = \dot{w}_0 \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \quad (4.82)$$

式中,  $\dot{w}_0$  为板中心挠度速度。

相应机构的外力功率为

$$T = \int_0^a q \dot{w} 2\pi r dr \quad (4.83)$$

将式(4.82)代入式(4.83)中,得外力功率  $T$  为

$$T = \int_0^a q \dot{w}_0 \left( 1 - \frac{r}{a} \right) 2\pi r dr = \frac{\pi q}{3} \dot{w}_0 a^2$$

内力功率的表达式用  $T'$  表示为

$$T' = \pi M_i \int_0^a (|\dot{k}_r| + |\dot{k}_\theta| + |\dot{k}_r + \dot{k}_\theta|) r dr \quad (4.84)$$

式中,  $\dot{k}_r$ 、 $\dot{k}_\theta$  分别为板塑性极限变形时径向和环向的曲率变化率。对周边简支圆板,有

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_r &= -\frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} = 0 \\ \dot{k}_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} = \frac{\dot{w}_0}{ar} \end{aligned} \right\} \quad (4.85)$$

将以上曲率变化率代入  $T'$  中,则有

$$T' = \pi M_i \int_0^a \left( 0 + \frac{\dot{w}_0}{ra} + 0 + \frac{\dot{w}_0}{ar} \right) r dr = 2\pi M_i \dot{w}_0$$

根据虚功率原理,由  $T=T'$ ,得出这种变形可能的机动法极限荷载

$$q_i = \frac{6M_i}{a^2}$$

显然与静力法确定的极限荷载是相同的。故这一  $q_i$  是真实的塑性极限荷载。

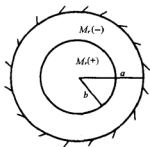


图 4.4 周边固支圆板极限状态

2) 如果圆板周边是固支的, 并设圆板半径为  $a$ , 受均匀荷载  $q$  作用, 此时径向弯矩有正有负。板中部径向弯矩是正的, 靠近支座处的径向弯矩是负的。

按静力法分析该圆形板的极限状态。应将圆板分成两部分, 如图 4.4 所示。图中  $b$  为正、负径向弯矩交界处半径。在  $0 < r < b$  部分, 因为  $r=b$  时,  $M_r=0$ , 故按 Tresca 屈服准则取  $M_\theta=M_r$ ; 而在  $b < r < a$  时, 按 Tresca 屈服准则取  $M_\theta-M_r=M_i$ 。

前一种情况下, 由平衡方程求出

$$M_r^I = M_i - \frac{1}{6}qr^2 + \frac{C}{r} \quad (0 \leq r \leq b) \quad (4.86)$$

后一种情况下, 由平衡方程求出

$$M_r^I = M_i \ln r - \frac{1}{4}qr^2 + D \quad (b \leq r \leq a) \quad (4.87)$$

由边界条件和内力分布连续条件可以确定以上式中的积分常数  $C, D$  以及塑性极限荷载  $q_i$ 。

由式(4.86)可知  $r=0$  处  $M_r^I=M_i$ , 而在  $r=b$  处  $M_r^I=0$ , 可以解出

$$M_i = \frac{1}{6}qb^2$$

$$q = \frac{6M_i}{b^2}$$

而由式(4.87)可知  $r=b$  处  $M_r^I=0$ ,  $r=a$  处  $M_r^I=-M_i$ 。由式(4.87)求出  $b=0.73a$ 。再将  $b=0.73a$  代入上式求出塑性极限荷载  $q_i$  为

$$q_i = 11.3 \frac{M_i}{a^2}$$

再对此问题用机动法求解。在圆形板中心部分, 即  $0 \leq r \leq b$  部分, 有

$$\frac{d^2 \dot{w}_1}{dr^2} = 0$$

$$\dot{w}_1 = C_1 r + C_2 \quad (4.88)$$

在板的边缘部分, 即  $b \leq r \leq a$  部分, 由于  $\dot{k}_r = -\dot{k}_\theta$ , 有

$$\frac{d^2 \dot{w}_2}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{d\dot{w}_2}{dr}$$

$$\dot{w}_2 = C_3 \ln r + C_4 \quad (4.89)$$

式(4.88)与(4.89)即是可能的机动场。其中4个积分常数必须满足边界条件与变形连续条件。

由

$$\begin{aligned} r=b \quad \frac{d\dot{w}_1}{dr} &= \frac{d\dot{w}_2}{dr} & \dot{w}_1 &= \dot{w}_2 \\ r=a \quad \dot{w}_2 &= 0 \end{aligned}$$

可以得出

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{C_3}{b} \\ C_2 &= C_3 \left( \ln \frac{b}{a} - 1 \right) \\ C_4 &= -C_3 \ln a \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

将式(4.90)分别代入  $\dot{w}_1$  与  $\dot{w}_2$  中得出

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_1 &= C_3 \left( \frac{r}{b} - 1 + \ln \frac{b}{a} \right) & (0 \leq r \leq b) \\ \dot{w}_2 &= C_3 \ln \frac{r}{a} & (b \leq r \leq a) \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

如果进而利用  $r=a$  处  $\frac{d\dot{w}_2}{dr}=0$  的边界条件,则必有  $C_1=C_2=C_3=C_4=0$  和  $\dot{w}_1=\dot{w}_2$ ,但这样不能构成机动场,因而机动场中必须有  $r=a$  处  $\frac{d\dot{w}_2}{dr} \neq 0$ 。

依据外力功率公式,有

$$T = 2\pi q \left[ \int_0^b \dot{w}_1 r dr + \int_b^a \dot{w}_2 r dr \right] = \frac{1}{6} \pi q C_3 (3a^2 - b^2)$$

而内力功率公式为

$$\begin{aligned} T' &= \pi M_s \left[ \int_0^b \left( \frac{C_3}{r} + 0 + \frac{C_3}{r} \right) r dr \right. \\ &\quad \left. + \int_b^a \left( \frac{C_3}{r^2} + \frac{C_3}{r^2} + 0 \right) r dr \right] + 2\pi a M_s \frac{C_3}{a} \\ &= 2\pi M_s C_3 \left( 2 + \ln \frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

上式中  $2\pi M_s a \frac{C_3}{a}$  为塑性铰线所做的功率。

由于  $T=T'$ , 故得出

$$M_s = \frac{q}{12} \times \frac{3a^2 - b^2}{2 + \ln \frac{a}{b}} \quad (4.92)$$

式中,  $b$  为未知数,通过条件  $\frac{dq}{db}=0$  定出。因为这时所求的  $q$  为最小荷载,由此条件

求出

$$b = 0.73a$$

再代入式(4.92), 得出塑性极限荷载  $q_i$  为

$$q_i = 11.3 \frac{M_s}{b^2}$$

由于这与静力分析所得的结果相同, 因而固支圆板受均布荷载作用下的塑性极限荷载为  $11.3 \frac{M_s}{a^2}$ 。

## 4.5 组合受力圆形板的塑性极限分析

这里考察图 4.5 所示的周边铰支圆板, 承受周边拉力  $N$  与横向压力  $q$  的组合作用。本节分析它的塑性极限荷载。

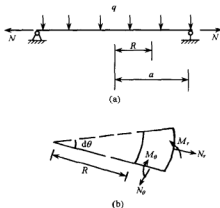


图 4.5 组合受力圆板

如设板厚为  $2H$ , 板单向最大单位宽度拉力用  $N_0$  表示, 并且有  $N_0 = 2\sigma_s H$ ,  $\sigma_s$  表示材料进入塑性的应力值。最大单位宽度的弯矩用  $M_0$  表示, 并且有  $M_0 = \sigma_s H^2$ ,  $k$  表示中面曲率速率。

采用无量纲的变量, 有

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{a} & h &= \frac{H}{a} & n_\theta &= \frac{N_\theta}{N_0} & n_r &= \frac{N_r}{N_0} & p &= \frac{qa^2}{6M_0} \\ m_\theta &= \frac{M_\theta}{M_0} & m_r &= \frac{M_r}{M_0} & w &= \frac{W}{H} & v &= \frac{V}{a} & k_r &= \frac{HK_r}{2} & k_\theta &= \frac{HK_\theta}{2} \end{aligned}$$

式中,  $W$ 、 $V$  分别为圆板在法向和径向的位移变形;  $a$  为圆板半径。

平衡方程用无量纲量表达为

$$\left. \begin{aligned} (rn_r)' - n_\theta &= 0 \\ (rm_r)' - m_\theta &= -3pr^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$



式中,  $(\quad)' = \frac{d}{dr}(\quad)$ 。

几何方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\theta} &= \frac{v}{r} & \dot{\epsilon}_r &= v' \\ \dot{k}_{\theta} &= -h^2 w' / 2r & \dot{k}_r &= -h^2 w'' / 2 \end{aligned} \right\} \quad (4.94)$$

屈服准则方程的建立要依赖于以下条件:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= 0 & \dot{k}_r &= 0 \\ \dot{\epsilon}_{\theta} &> 0 & \dot{k}_{\theta} &> 0 \end{aligned}$$

按正交流动法则, 相应于广义应变率的 Tresca 屈服准则式为

$$m_{\theta} = 1 - n_{\theta}^2 \quad (4.95)$$

如果令  $\frac{N}{N_0} = t$ , 在  $0 < t < 1$  时边界条件为

$$\left. \begin{aligned} m_r(0) &\text{有限} & m_r(1) &= 0 \\ w(1) &= 0 & n_r(1) &= t \end{aligned} \right\} \quad (4.96)$$

(1) 静力允许应力场

应力场在板整个区域内,  $n_{\theta} = n_r = t$ , 满足膜力的平衡方程和边界条件。

结合平衡方程、边界条件及屈服准则式, 这里得

$$\left. \begin{aligned} m_{\theta} &= 1 - t^2 \\ m_r &= (1 - t^2)(1 - r^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

$$p = 1 - t^2 \quad (4.98)$$

广义应力  $n_r, m_r$  必须满足以下不等式:

$$2 \left[ \left( n_r - \frac{n_{\theta}}{2} \right)^2 - \frac{n_{\theta}^2}{4} \right] \leq m_r \leq 1 - 2 \left[ \frac{n_{\theta}^2}{4} + \left( n_r - \frac{n_{\theta}}{2} \right)^2 \right]$$

将  $n_{\theta} = n_r = t$  代入前式左右两边, 成为如下表达:

$$0 \leq m_r \leq 1 - t^2 \quad (4.99)$$

这时静力允许解为

$$\left. \begin{aligned} n_{\theta} &= n_r = t \\ m_{\theta} &= 1 - t^2 \\ m_r &= (1 - t^2)(1 - r^2) \\ p &= 1 - t^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

(2) 速度场

按速度场与屈服准则式相关连的流动法则, 有

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\theta} &= 2\lambda n_{\theta} & \dot{\epsilon}_r &= 0 \\ \dot{k}_{\theta} &= \lambda & \dot{k}_r &= 0 \end{aligned}$$

将几何方程式(4.94)以及  $n_r = n_{\theta} = t$  代入上式, 得出

$$\left. \begin{aligned} v &= h^2 w_0 t \\ w &= w_0(1-r) \end{aligned} \right\} \quad (4.101)$$

式中,  $w_0$  表示板中点的挠度速度。显然, 与静力允许应力场相关连的速度场公式 (4.101) 符合塑性势理论 (保证  $\lambda > 0$ )。在  $r=0$  处,  $v$  及  $w'$  间断, 形成点塑性铰圆。

综合以上静力场与速度场的分析, 该问题的完全解为

$$\left. \begin{aligned} n_\theta &= n_r = t & v &= h^2 w_0 t \\ m_\theta &= 1 - t^2 & w &= w_0(1-r) \\ m_r &= (1-t^2)(1-r^2) & p &= 1 - t^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.102)$$

当  $t=0$  时, 式 (4.102) 转化为

$$\left. \begin{aligned} m_\theta &= 1 & w &= w_0(1-r) \\ m_r &= 1 - r^2 & p &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

而对应的不等式  $0 \leq m_r \leq 1$ , 即为受均匀分布横向荷载作用下周边铰支圆板的极限状态全解。

弹性地基板是工程结构中遇得较多的结构形式。4.2 节已经对弹性地基上的圆形板做过弹性变形的讨论, 用 Tomson 函数给出多种荷载作用下的一般解。

这里进一步讨论弹性地基上圆形板在外荷载即横向荷载  $q$  作用下的弹塑性变形。设圆板的几何尺寸等均如图 4.5 所示。

仍然采用无量纲量,  $V$  为  $V_r$  的无量纲量, 则有无量纲型的平衡方程

$$(Vr)' + (p - w)r = 0 \quad (4.104)$$

$$(m_r)' - m_\theta - Vr = 0 \quad (4.105)$$

几何方程为

$$k_r = -w'' \quad k_\theta = -\frac{w'}{r} \quad (4.106)$$

将曲率分成弹性和塑性两部分, 即

$$k_r = k_r^e + k_r^p \quad k_\theta = k_\theta^e + k_\theta^p$$

弹性部分有胡克定律

$$\left. \begin{aligned} m_r &= k_r^e + \mu k_\theta^e \\ m_\theta &= k_\theta^e + \mu k_r^e \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

在塑性部分有主力矩形屈服准则式

$$|m_r| \leq m_0 \quad |m_\theta| \leq m_0 \quad (4.108)$$

先求弹性解。如塑性曲率为零, 则有

$$w^{(4)} + 2 \frac{w^{(3)}}{r} - \frac{w^{(2)}}{r^2} + \frac{w'}{r^3} + w = p \quad (4.109)$$

$$\left. \begin{aligned} m_r &= - \left( w'' + \mu \frac{w'}{r} \right) \\ m_\theta &= - \left( \frac{w'}{r} + \mu w'' \right) \\ V &= - \left( w' + \frac{w'}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

塑性区域按 Tresca 屈服准则式, 取  $m_\theta = m_0$  或  $m_\theta = -m_0$ , 代入平衡方程

$$(m_r r)'' + (p - w)r = 0 \quad (4.111)$$

求出

$$\begin{aligned} m_r &= \pm m_0 + A + \frac{B}{r} + \frac{1}{r} \int r^2 (p - w) dr - \int (p - w) r dr \\ V &= \frac{A}{r} - \frac{1}{r} \int (p - w) r dr \end{aligned}$$

这时必有  $k_r^p = 0, k_\theta^p \geq 0$ , 故有

$$\left. \begin{aligned} k_r &= k_r^e + k_r^p = -w'' = \frac{m_r \pm \mu m_\theta}{1 - \mu^2} \\ m_r &= \pm \mu m_0 - (1 - \mu^2) w'' \\ w(r) &= A_0 V_0(r) + A_1 V_1(r) + A_2 V_2(r) + A_3 [V_1(r) \ln r + r V_1(r)] + w_0(r) \end{aligned} \right\} \quad (4.112)$$

径向弯矩可由前面式(4.110)计算出。经过比较得

$$\begin{aligned} A &= \pm (1 - \mu) m_0 - 2A_2 (1 - \mu^2) \\ B &= -A_3 (1 - \mu^2) \end{aligned}$$

## 4.6 环形板的塑性弯曲<sup>1)</sup>

本节讨论的环形板的塑性弯曲采用 Mises 屈服准则的参数式, 将给出连续表达的有普遍意义的塑性解答。环板弯曲弹塑性分析比塑性极限分析对结构设计有更大的理论意义。

设有内半径为  $b$ 、外半径为  $a$  的环形薄板。外周边为铰支, 内周边受有集度为  $m$  的弯矩作用。显然在  $m$  较小时, 环板结构处于弹性变形状态。依据弹性板壳理论可知, 此结构的挠度  $w$  为

$$w = - \frac{mb^2}{2(1 + \mu)(a^2 - b^2)D} \left[ a^2 - r^2 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} a^2 \ln \frac{r}{a} \right] \quad (4.113)$$

式中,  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$  为板抗弯刚度;  $h$  为板厚。

根据挠度  $w$  与板的径向弯矩  $M_r$ 、环向弯矩  $M_\theta$  之间微分关系, 由式(4.113)可

1) 贾乃文, 环形板受弯的弹塑性参数解, 应用力学学报, 1985 年 2 期

求出弹性变形的弯矩,不失一般性的表达为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \left( C_1 - \frac{C_2}{\rho} \right) \\ M_\theta &= \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \left( C_1 + \frac{C_2}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.114)$$

式中,  $M_s$  为板的塑性极限弯矩,它是板内的应力达到  $\sigma_s$  对应的弯矩;  $C_1$ 、 $C_2$  为常数;  $\rho = \frac{r}{b}$  为无量纲参数。

环形板纯弯曲的平衡方程为

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = 0 \quad (4.115)$$

用弯矩表达的平面应力形 Mises 屈服准则式为

$$M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = M_s^2 \quad (4.116)$$

联立求解以上两方程,将  $M_\theta$  用  $M_r$  表示,有

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{2} M_r \pm \sqrt{M_s^2 - \frac{3}{4} M_r^2} \right] = 0 \quad (4.117)$$

由于式(4.116)表达的是椭圆方程,在引入新坐标  $M$  和  $M'$  之后,按图 4.6 的转换关系,得

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} (M_r + M_\theta) \quad (4.118)$$

$$M' = \frac{1}{\sqrt{2}} (M_\theta - M_r) \quad (4.119)$$

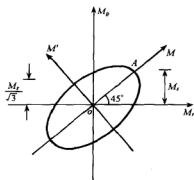


图 4.6 椭圆参数表达

从图 4.6 可以看出,椭圆的长半轴为  $\sqrt{2} M_s$ , 短半轴为  $\sqrt{\frac{2}{3}} M_s$ 。引入参数  $\alpha$  表达椭圆时,可得

$$\left. \begin{aligned} M &= \sqrt{2} M_s \cos \alpha \\ M' &= \sqrt{\frac{2}{3}} M_s \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.120)$$

显然,  $\alpha$  的含义为椭圆上的点与原点的矢径与  $M$  轴的夹角。

将式(4.120)代入式(4.118)与式(4.119)中,并从中求出参数  $\alpha$  表达的原坐标下的弯矩:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{2M_s}{\sqrt{3}} \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right) \\ M_\theta &= \frac{2M_s}{\sqrt{3}} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

显然,这样表达的内力是满足 Mises 屈服准则式的。再将其代入式(4.117)的平衡方程中,得出

$$\frac{dr}{r} = - \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) d\alpha}{\sin\alpha} \quad (4.122)$$

求积分并引用  $\rho$  的无量纲表达,则有

$$\left(\frac{C}{b\rho}\right)^2 = e^{\sqrt{3}\alpha} \sin\alpha \quad (4.123)$$

式中,  $C$  为积分常数。式(4.123)表明  $\alpha$  与  $\rho$  有关。在  $\rho=1$  即  $r=b$  处的  $\alpha$  记为  $\alpha_b$ , 代入  $r=b$  处的力的边界条件  $M_r=m$ , 从式(4.121)中可求出  $\alpha_b$ , 再代入式(4.123)求出积分常数  $C$  为

$$C^2 = b^2 e^{\sqrt{3}\alpha_b} \sin\alpha_b \quad (4.124)$$

在  $m$  逐渐增大时, 环形板将首先从内周边起进入塑性, 并向外扩展, 形成弹性和塑性变形区。如果荷载是轴对称的, 那么这一弹性和塑性的交界线为一半径为  $r_i$  的圆周。

在  $b \leq r \leq r_i$  时, 板处于塑性状态, 其内力为式(4.121)。内力是通过参数  $\alpha$  表达的, 而  $\alpha$  与  $r$  之对应关系为式(4.122), 由  $r$  从式(4.122)中寻找  $\alpha$ , 代入式(4.121)获得内力, 而积分常数  $C$  按式(4.124)计算。

在  $r_i \leq r \leq a$  时, 板处于弹性状态, 其内力取式(4.114), 并有边界条件  $r=a$  时  $M_r=0$ , 从中解出

$$C_1 = \frac{b^2}{a^2} C_2$$

再利用  $r=r_i$  处的内力连续条件得

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha_i + \frac{\pi}{6}\right) &= C_1 - \frac{C_2}{\beta_2} \\ \cos\left(\alpha_i - \frac{\pi}{6}\right) &= C_1 + \frac{C_2}{\beta_2} \end{aligned}$$

式中,  $\beta$  是  $r=r_i$  处的  $\rho$  值, 表达为

$$\beta = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_b - \alpha_i)} \sqrt{\frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_i}} \quad \rho = \frac{r_i}{b}$$

由以上条件式解出

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\alpha_i \\ C_2 &= \frac{\beta^2}{2} \sin\alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (4.125)$$

外荷载与弹塑性交界线半径  $r_i$  之间关系是由参数  $\alpha$  给出的。将式(4.125)中  $C_1$  与  $C_2$  代入式(4.114), 得弹性区内力具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= M_s \left( \cos \alpha_s - \frac{\beta^2}{\sqrt{3} \rho^2} \sin \alpha_s \right) \\ M_\theta &= M_s \left( \cos \alpha_s + \frac{\beta^2}{\sqrt{3} \rho^2} \sin \alpha_s \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.126)$$

由  $m$  确定  $r_s$  的过程是这样的: 由  $C_1$  与  $C_2$  之间关系可以得出

$$\frac{b^2 \beta^2}{2a^2} \sin \alpha_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_s$$

将弹塑性交界线处  $\beta$  值代入上式, 得

$$\frac{b^2 \sin \alpha_s}{a^2} e^{\sqrt{3}(\alpha_0 - \alpha_s)} = \sqrt{3} \cos \alpha_s \quad (4.127)$$

依据  $\frac{m}{M_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left( \alpha_0 + \frac{\pi}{6} \right)$  的边界条件式, 由  $m$  可以定出  $\alpha_0$ , 再代入式(4.127)中可确定出弹塑性交界线处的参数  $\alpha_s$ , 由  $\alpha_s, \alpha_0$  求出  $\beta$ , 从而确定出弹塑性交界线半径  $r_s$ 。

当环形板全部进入塑性时, 令  $r_s = b$ , 代入  $\beta$  表达式中有

$$\frac{a^2}{b^2} = e^{\sqrt{3}(\alpha_0 - \alpha_s)} \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_s} \quad (4.128)$$

将它与式(4.127)比较得出

$$\cos \alpha_0 - \frac{\sin \alpha_s}{\sqrt{3}} = 0$$

由此求出  $\alpha_s = \frac{\pi}{3}$ 。将这一  $\alpha_s$  值代入塑性区内力表达式(4.121), 可知满足外周边条件, 即  $r=a$  时  $M_r=0$ 。而塑性极限弯矩  $m$  的求法是: 先由给定的  $a$  值与  $\alpha_s = \frac{\pi}{3}$  代入式(4.124)中求出相应  $\alpha_0$ , 再将  $\alpha_0$  代入式(4.121)的  $M_r$  公式求出极限荷载  $m$  值。

由塑性内力公式(4.121)可知,  $\alpha = \frac{5}{6}\pi$  时  $m$  取最大值, 将这一  $\alpha_0$  值代入式(4.124)中, 有

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{5\pi}{6}} e^{\sqrt{3} \left( \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3} \right)} \approx 2.963$$

这一结果说明对内周边受纯弯矩  $m$  作用的环形板, 板变成全部塑性是有限制的, 即  $\frac{a}{b}$  在 2.963 之内时可达到这一结果。如果  $\frac{a}{b} > 2.963$  时, 那么无论  $m$  加至多大, 该环形板都不会全部进入塑性。

将以上环形板的弹塑性分析进一步引伸到工程结构中常用的内外周边均为铰支、在内周边受有集度为  $m$  的径向弯矩作用的问题。它的力学简化模型是环形板外周边  $r=a$  处铰支, 而在内周边  $r=b$  处, 除有径向弯矩  $m$  均匀作用外, 还有剪力  $q$  的均匀作用。在结构工程中的圆形板(半径  $r=a$ )受有  $r=b$  的同心圆荷载  $q$  作用

的情形即是这种力学模型。

这一问题的平衡方程为

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = q \quad (4.129)$$

同样的 Mises 屈服准则式为

$$M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = M_s^2 \quad (4.130)$$

将参数式方程(4.121)代入式(4.129)后,会得出

$$r \frac{d}{dr} \left[ \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \right] - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3} P}{4\pi M_s} \quad (4.131)$$

式中,  $P = 2\pi b q$ 。按板壳理论结果,在同心圆  $r = b$  的总荷载  $P$  达到条件

$$\frac{\sqrt{3} P}{4\pi M_s} = \frac{6\sqrt{3} a}{4(3a - 2b)}$$

时,内周边才进入塑性。这一条件下如使

$$\frac{6\sqrt{3} a}{4(3a - 2b)} < 1$$

那么应有  $\frac{b}{a} \leq 0.2$ , 这时  $\frac{\sqrt{3} P}{4\pi M_s} < 1$  是普遍的。于是我们可令

$$\frac{\sqrt{3} P}{4\pi M_s} = \cos \phi \quad (4.132)$$

将式(4.132)代入式(4.131)中,得

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha}{2 \left( 2 \cos \frac{\alpha + \phi}{2} \cos \frac{\alpha - \phi}{2} \right)} d\alpha \quad (4.133)$$

如令  $\frac{1}{2}(\alpha + \phi) = \beta$ ,  $\frac{1}{2}(\alpha - \phi) = \gamma$ , 再将式(4.133)两边积分,得

$$\begin{aligned} \ln r &= \frac{\sqrt{3}}{4} \alpha - \frac{1}{2} \ln \cos \beta - \frac{1}{2} \ln \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\gamma + \operatorname{ctg} \phi \ln \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \right) + \ln A \\ \text{整理得} \\ \left( \frac{A}{r} \right) &= e^{-\sqrt{3} \gamma} (\cos \gamma)^{1+\sqrt{3} \operatorname{ctg} \phi} (\cos \beta)^{1-\sqrt{3} \operatorname{ctg} \phi} \end{aligned} \quad (4.134)$$

式(4.134)即为式(4.129)非线性非齐次方程的参数解。式中,  $A$  为积分常数,由边界条件确定。如令  $P = 0$ , 则  $\cos \phi = 0$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , 式(4.134)改为

$$\frac{\rho_0^2}{r^2} = e^{-\sqrt{3} \gamma} \cos \alpha$$

即为原环形板仅在内周边受弯矩作用下的解,显然这是方程(4.134)的特例。式(4.134)更有广泛性。

如果环形板全部进入塑性,利用  $r = a$  时  $M_r = 0$  的条件,由参数式(4.121)得  $\alpha$ 。

$=\frac{\pi}{6}$ , 再代入式(4.134)可确定常数  $A$  为

$$A^2 = a^2 e^{-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\phi}{2}\right)} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{6}-\phi}{2} \right)^{1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\phi} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{6}+\phi}{2} \right)^{1-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\phi} \quad (4.135)$$

如果环形板处在弹塑性变形过程, 令  $r_s$  为弹塑性交界线半径。在  $r \leq r_s$  时, 环形板处在塑性变形状态, 其解为式(4.134)。常数  $A$  应当由  $r=r_s$  时  $\alpha=\alpha_s$  条件确定为

$$A^2 = r_s^2 e^{-\sqrt{3}\left(\alpha_s-\frac{\pi}{2}\right)} \left( \cos \frac{\alpha_s-\phi}{2} \right)^{1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\phi} \left( \cos \frac{\alpha_s+\phi}{2} \right)^{1-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\phi}$$

在  $r > r_s$  部分, 环形板处于弹性变形状态。这时可利用板壳理论的已知结果, 有

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{P}{8\pi} \left[ (1-\mu) \left( 1 - \frac{a^2-b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2} \right) + (2+2\mu) \ln \frac{r}{a} \right] \\ M_\theta &= -\frac{P}{8\pi} \left[ (1-\mu) \left( -1 - \frac{a^2-b^2}{a^2} + \frac{b^2}{r^2} \right) + (2+2\mu) \ln \frac{r}{a} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.136)$$

式中,  $P=2\pi bq$ 。将  $r=r_s$  代入式(4.136)中, 并分别将这两式与塑性解的  $r=r_s$  值对应相等, 建立应力连续方程为

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \sin \left( \alpha_s - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \sin \left( \alpha_s + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= -\frac{P}{8\pi} \left[ -2(1-\mu) \frac{a^2-b^2}{a^2} + 4(1+\mu) \ln \frac{r_s}{a} \right] \\ & \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \sin \left( \alpha_s - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \sin \left( \alpha_s + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{P}{8\pi} (1-\mu) \left( 2 + \frac{2b^2}{r_s^2} \right) \end{aligned}$$

从中解出  $r_s$  和  $\alpha_s$  值。再将  $\alpha_s$  及  $r_s$  代入式(4.135)中可求出常数  $A$ 。于是弹塑性的弯矩可以分别求出。弹性解为式(4.136), 塑性解为式(4.121)。

## 4.7 非线性硬化环形板塑性弯曲<sup>1)</sup>

材料进入塑性后通常有两种硬化状态, 即如图 4.7 中的两种  $\sigma_i-\epsilon_i$  曲线。①曲线为线性硬化曲线, 这在本书的前面部分均有涉及。②曲线是非线性硬化状态, 其  $\sigma_i-\epsilon_i$  之间有如下关系:

$$\sigma_i = A \epsilon_i^n \quad (4.137)$$

式中,  $A, n$  均为常数, 其中  $0 < n < 1$ 。

本节考虑材料有如式(4.137)表示的塑性状态, 研究环形板的非线性弯曲, 即半径为  $a$  的环形板外周边铰支; 半径为  $b$  的环形板内周边受有集度为  $m$  的弯矩作

1) 引自参考文献[1]。



用。结构的力学方程为

1) 平衡方程。为方便计算, 仍用应力与应变表示

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4.138)$$

2) 协调方程。限于小弹塑性变形, 略去  $\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2$  的高阶小量, 按板壳理论有

$$\frac{d\epsilon_\theta}{dr} + \frac{\epsilon_\theta - \epsilon_r}{r} = 0 \quad (4.139)$$

3) 塑性硬化  $\sigma_i - \epsilon_i$  之关系为

$$\sigma_i = A\epsilon_i^n$$

4) 全量形塑性本构方程, 计入  $\sigma_e = 0$ , 有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\epsilon_i}{3\sigma_i} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \\ \epsilon_\theta &= \frac{\epsilon_i}{3\sigma_i} (2\sigma_\theta - \sigma_r) \end{aligned} \right\} \quad (4.140)$$

5) 应力强度为

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad (4.141)$$

以上共有 6 个方程, 待求未知变量为  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_i, \epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_i$ , 共有 6 个, 属静定可解问题。

引用参数  $\alpha$  表达的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha) \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (4.142)$$

这是满足式(4.141)的应力表达, 将它代入式(4.140), 可得出用  $\alpha$  表达的应变分量:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon_i \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{3} \right) \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_i \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.143)$$

将式(4.143)代入协调方程式(4.139)中, 得出

$$\sin \left( \alpha + \frac{\pi}{3} \right) \frac{d\epsilon_i}{dr} + \epsilon_i \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{3} \right) \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\epsilon_i}{r} \sqrt{3} \cos \alpha = 0$$

如引用记号  $\alpha(r) = -\text{ctg} \left( \alpha + \frac{\pi}{3} \right)$ , 则可归纳上式为

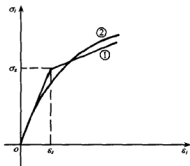


图 4.7 两种材料  $\sigma_i - \epsilon_i$  图

$$\frac{d\epsilon_i}{dr} - \epsilon_i a(r) \frac{da}{dr} + \frac{\sqrt{3} \epsilon_i \cos \alpha}{r \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} = 0 \quad (4.144)$$

再将式(4.142)代入平衡方程式(4.138),注意到

$$d\sigma_i = \frac{n\sigma_i}{\epsilon_i} d\epsilon_i$$

获得用  $\epsilon_i$  与  $\alpha$  表达的平衡方程

$$\frac{na(r)}{\epsilon_i} \frac{d\epsilon_i}{dr} + \frac{da}{dr} - \frac{\cos \alpha}{r \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} = 0 \quad (4.145)$$

以上式(4.144)与式(4.145)即为用参数  $\alpha$  表达的非线性硬化环形板弯曲的基本方程,联立求解这两个方程,就可以获得应力强度与应变强度解。具体做法是将

式(4.144)中的  $\frac{d\epsilon_i}{dr}$  解出代入式(4.145),考虑  $a(r)$  的具体表达,则有

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha d\alpha + \frac{\sqrt{3}(1-n) \operatorname{tg} \alpha + (3+n)}{2[(1+3n) \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3}(1-n)]} d\alpha$$

为简化计算,令

$$\gamma = \frac{3+n}{\sqrt{3}(1-n)} \quad \beta = \frac{1+3n}{\sqrt{3}(1-n)}$$

获得改进的  $r$  与  $\alpha$  之微分关系为

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha d\alpha + \frac{\gamma + \operatorname{tg} \alpha}{2(\beta \operatorname{tg} \alpha + 1)} d\alpha \quad (4.146)$$

两边积分之后得

$$C_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln \cos \alpha + \frac{\gamma \beta - 1}{2(1 + \beta^2)} \ln(\cos \alpha + \beta \sin \alpha) + \frac{\gamma + \beta}{2(1 + \beta^2)} \alpha \right\} = r \quad (4.147)$$

式(4.147)即为平衡方程的参数解,其中,  $C_1$  为待定常数,将由边界条件确定。式(4.147)描述了径向坐标  $r$  与参数  $\alpha$  之关系。

由式(4.145)中解出  $\frac{da}{dr}$  为

$$\frac{da}{dr} = \frac{[1 + \sqrt{3} na(r)] \cos \alpha}{r[1 + na^2(r)] \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}$$

代入变形协调方程式(4.144)中,得出  $\epsilon_i$  与  $r$  之微分关系为

$$\frac{d\epsilon_i}{\epsilon_i} = \frac{-8}{(1+3n) \operatorname{tg}^2 \alpha + 2\sqrt{3}(1-n) \operatorname{tg} \alpha + 3+n} \frac{dr}{r}$$

利用式(4.145)推出的  $\frac{dr}{r}$  式为

$$\frac{dr}{r} = \frac{(1+3n)\operatorname{tg}^2\alpha + 2\sqrt{3}(1-n)\operatorname{tg}\alpha + 3+n}{2[(1+3n)\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3}(1-n)]} d\alpha$$

整理出  $\epsilon_i$  与  $\alpha$  之关系如下:

$$\frac{d\epsilon_i}{\epsilon_i} = \frac{-4}{(1+3n)\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3}(1-n)} d\alpha \quad (4.148)$$

两边积分得

$$C_2 \exp \left\{ -\frac{4}{\sqrt{3}(1-n)(1+\beta^2)} [\beta \ln(\cos\alpha + \beta \sin\alpha) + \alpha] \right\} = \epsilon_i \quad (4.149)$$

式(4.149)即为反映变形协调方程的应变强度与  $\alpha$  之关系式。 $C_2$  为积分常数,通过边界条件式及硬化材料物理式加以确定。

非线性硬化环形板的塑性弯曲的解由式(4.147)与式(4.148)组成。在环形板内周边作用  $m$  集度弯矩时,在任一半径  $r$  处,由式(4.147)惟一确定出参数  $\alpha$ ,再将这一  $\alpha$  值代入式(4.148),获得确定的对应  $\epsilon_i$  值,再依据  $\sigma_i$  与  $\epsilon_i$  之物理关系式(4.137),求出  $\sigma_i$ 。由式(4.142)求出对应  $r$  处的  $\sigma_r, \sigma_\theta$ 。相应的薄板弯矩为

$$M_r = \frac{h^2}{4} \sigma_r \quad M_\theta = \frac{h^2}{4} \sigma_\theta$$

式中,  $h$  为板厚。

下面给出积分常数  $C_1$  与  $C_2$  的确定方法。如按外周边  $r=a$  铰支、内周边  $r=b$  有集度  $m$  的弯矩,边界条件表达为

$$\begin{aligned} M_r &= 0 & r &= a \\ M_r &= m & r &= b \end{aligned}$$

由前一条件式,从应力表达式(4.142)中得出  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ,代入式(4.147)中,有

$$\begin{aligned} a &= C_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\gamma\beta - 1}{2(1+\beta^2)} \ln \left( \cos \frac{\pi}{6} + \beta \sin \frac{\pi}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma + \beta}{2(1+\beta^2)} \frac{\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

由此确定出  $C_1$ 。再将第二式的条件代入式(4.142)中,解出  $r=b$  时的  $\alpha_b$ 。由应力关系式推广到弯矩表达式

$$m = \frac{M_i}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \sin \alpha_b - \cos \alpha_b)$$

由此确定出  $r=b$  处的  $M_i$  值。将非线性硬化条件  $\sigma_i = A\epsilon_i^\gamma$  以及  $\sigma_i = \frac{4M_i}{h^2}$  代入式(4.149)得

$$\frac{4M_i}{h^2} = AC_2^\gamma \exp \left\{ -\frac{4\gamma}{\sqrt{3}(1-n)(1+\beta^2)} [\beta \ln(\cos \alpha_b + \beta \sin \alpha_b) + \alpha_b] \right\}$$

由这一方程确定出  $C_2$ 。

例如对内外半径为  $2/5$  之薄圆环板, 设板厚为 1, 承受  $m=1000\text{kN} \cdot \text{m/m}$  的内周边弯矩。在材料非线性硬化系数  $A=1, n=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  等情况下, 计算出  $\alpha$  与  $r$  以及  $r$  与  $\sigma_r, \sigma_\theta$  之曲线, 如图 4.8、4.9 所示。

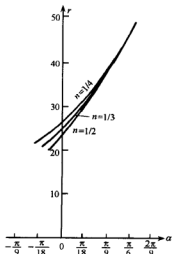


图 4.8  $r-\alpha$  曲线

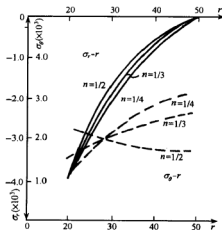


图 4.9  $\sigma_r-r, \sigma_\theta-r$  曲线

#### 4.8 正交异性非线性变厚环形板<sup>1)</sup>

在环形板结构的解析理论中, 已有文献给出了线性变厚度环形板的问题, 也给出了各向同性的常厚度环形板问题。本节将讨论正交异性非线性变厚度环形板的解。虽然仅限于弹性解, 但它属于环形板结构非线性问题之一。

这里设板厚  $h$  为径向坐标  $r$  的非线性函数, 即

$$h = h_0 \left( \frac{r}{a} \right)^m \quad (4.150)$$

式中,  $a$  为环形板内半径或外半径,  $h_0$  为该处的板厚, 随  $m$  值不同, 板厚可取任意形状。当  $m=0$  时, 为常厚度板; 当  $m=1$  时, 则为线性变厚度板。

对混凝土等工程结构材料, 可令泊松比  $\mu=0$ , 各向异性板的抗弯刚度为

$$D_r(r) = \frac{E_r h_0^{3m} \left( \frac{r}{a} \right)^{3m}}{12} = \frac{E_r h_0^{3m}}{12 a^{3m}} r^{3m} = \alpha_r r^{3m}$$

$$D_\theta(r) = \frac{E_\theta h_0^{3m}}{12 a^{3m}} r^{3m} = \alpha_\theta r^{3m}$$

1) 贾乃文. 正交异性非线性变厚度环形板的分析. 应用力学学报, 2001 年 3 期

$$D_k(r) = \frac{G_k k_0^{3m}}{12\alpha^{3m}} r^{3m} = \alpha_k r^{3m}$$

下面分两种情况对正交异性非线性变厚环形板进行分析。

1) 板承受的荷载  $q=q(r)$ , 即与  $\theta$  角度无关, 这是环板结构工程中比较普遍应用的情况。

板的平衡方程为

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = V_r \quad (4.151)$$

式中,  $V_r$  是  $r$  处的剪力, 它可直接由环形板竖向荷载及内力的静力平衡关系计算, 应表达成  $q(r)$  的函数并与角度无关。在  $\mu=0$  时, 各向异性板弯矩与挠度  $w$  之关系为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D_r \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = -\alpha_r r^{3m} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \\ M_\theta &= -D_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -\alpha_\theta r^{3m-1} \frac{dw}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (4.152)$$

由此得出各向异性非线性变厚度环形板的弯曲方程:

$$\frac{dD_r}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} + D_r \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \left( D_r \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_\theta}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -V_r \quad (4.153)$$

这一方程可进一步表示为

$$\alpha_r r^{3m} \frac{d^3 w}{dr^3} + (3m+1) \alpha_r r^{3m-1} \frac{d^2 w}{dr^2} - \alpha_\theta r^{3m-2} \frac{dw}{dr} = -V_r \quad (4.154)$$

式(4.154)可由它的齐次方程的通解与它的非齐次方程的一个特解组合而成。

齐次解方程为

$$\alpha_r r^{3m} \frac{d^3 w}{dr^3} + (3m+1) \alpha_r r^{3m-1} \frac{d^2 w}{dr^2} - \alpha_\theta r^{3m-2} \frac{dw}{dr} = 0$$

这是一个 Euler 型可化为常系数的微分方程, 只要令  $r=e^t$ , 则有

$$\frac{d^3 w}{dt^3} + (3m-2) \frac{d^2 w}{dt^2} + \left[ 1 - 3m - \frac{\alpha_\theta}{\alpha_r} \right] \frac{dw}{dt} = 0 \quad (4.155)$$

用  $\lambda$  表示该方程的特征方程的解, 分别为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{1}{2} \left[ - (3m-2) \pm \sqrt{9m^2 + 4 \frac{\alpha_\theta}{\alpha_r}} \right] \end{aligned}$$

齐次方程的通解为

$$w = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2} + C \quad (4.156)$$

式中,  $A, B, C$  为待定常数。

特解则由  $q(r)$  给定的级数展开形式, 选定含有待定系数的相同级数代入非齐次方程, 比较两边系数不难求出。例如  $q$  为常数时, 可取特解  $w_1$  为  $w_1 = A_0 r^{-3m+4}$ ,

由方程两边系数相等确定出常数  $A_0$  等等。

如取环形板式(4.150)中  $m=1$ , 令  $\frac{\alpha_\theta}{\alpha_r}=1$ 。这表示线性变厚度环形板的弯曲问题, 并且是各向同性的。由本节中特征方程式计算出

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \quad \lambda_1 = 0$$

这些结果与已知参考文献是完全相同的。

2) 板承受的荷载为  $q(r)\sin n\theta$  型。这是一种环形板更为普遍的受力行为。这时环形板的挠度不再与  $\theta$  无关, 而是表达成  $w(r, \theta) = R(r)\sin n\theta$  型。

由挠度表达的这种形式, 要采用正交异性非线性变厚度环形板一般方程进行分析。

圆柱坐标下的环形板的弯曲平衡方程用内力可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - V_{rz} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) &= 0 \\ \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - V_{\theta z} + \frac{2}{r} M_{r\theta} &= 0 \\ \frac{\partial V_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} V_{rz} &= -q(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.157)$$

取混凝土等结构工程中常用的板, 即泊松比  $\mu=0$ , 按板厚  $h=h_0\left(\frac{r}{a}\right)^m$  计算, 则有内力与挠度表达式:

$$\begin{aligned} M_r &= -D_r(r) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = -\alpha_r r^{3m} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ M_\theta &= -D_\theta(r) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = -\alpha_\theta r^{3m} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ M_{r\theta} &= -2D_k \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{w}{r} \right) = -2\alpha_k r^{3m} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{w}{r} \right) \end{aligned}$$

式中,  $\alpha_k = \frac{G_k h_0^3}{12a^{3m}}$ , 其余  $\alpha_r, \alpha_\theta$  均同 1) 中的表达。

由式(4.157)中的第一式得出

$$V_{rz} = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) \quad (4.158)$$

由式(4.157)中的第二式得出

$$V_{\theta z} = \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} M_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \quad (4.159)$$

将式(4.158)与式(4.159)代入式(4.157)中的第三式, 并考虑到板厚是  $r$  的函数, 从而得出正交异性变厚度环形板挠度表达的一般方程为

$$D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{4D_k}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{D_\theta}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \left( \frac{2D_r}{r} + 2 \frac{dD_r}{dr} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial r^3}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{4}{r^2} \frac{dD_k}{dr} - \frac{4D_k}{r^3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} + \left( \frac{d^2 D_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dD_r}{dr} - \frac{D_g}{r^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\
& + \left( \frac{2D_g}{r^4} - \frac{1}{r^3} \frac{dD_g}{dr} + \frac{4D_k}{r^4} - \frac{4}{r^3} \frac{dD_k}{dr} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left( \frac{1}{r^2} \frac{dD_g}{dr} - \frac{D_g}{r^3} \right) \frac{\partial w}{\partial r} \\
& = q(r, \theta)
\end{aligned} \quad (4.160)$$

这一方程在常厚度  $h=h_0$  时转化为各向异性常厚度板的挠度方程, 已有文献对此进行了分析。式(4.160)即是正交异性非线性变厚度环形板的挠度表达的一般方程式。

如果式(4.160)等号右边荷载项  $q(r, \theta)$  可展开成  $q(r) \sin n\theta$  形式, 那么方程的挠度  $w(r, \theta)$  也可以表达成  $\sin n\theta$  的函数式, 这样就可以用分离变量方法求出方程(4.160)的齐次解。这时  $w(r, \theta)$  可以写成  $w(r, \theta) = R(r) \sin n\theta$  形式, 将  $R(r) \sin n\theta$  的挠度式代入式(4.160)的齐次方程, 得出关于函数  $R(r)$  的齐次方程为

$$\begin{aligned}
& \alpha_r r^{3m} \frac{d^4 R}{dr^4} + (2 + 6m) \alpha_r r^{3m-1} \frac{d^3 R}{dr^3} + [(9m^2 + 3m) \alpha_r - \alpha_g - 4\alpha_k n^2] r^{3m-2} \frac{d^2 R}{dr^2} \\
& + [(1 - 3m) \alpha_g + 4(1 - 3m) \alpha_k n^2] r^{3m-3} \frac{dR}{dr} + [\alpha_g n^4 - n^2(2 - 3m) \alpha_g n^2 \\
& - 4n^2(1 - 3m) \alpha_k] r^{3m-4} R = 0
\end{aligned} \quad (4.161)$$

显然, 这是一个变系数的 Euler 型方程, 通过  $r=e^t$  的代换, 可以化为关于变数  $t$  的常系数微分方程。如果用  $\lambda$  表示其特征方程, 则特征方程一般形式为

$$\begin{aligned}
& \alpha_r \lambda^4 + (2 + 6m) \alpha_r \lambda^3 + [(9m^2 + 3m) \alpha_r - \alpha_g - 4\alpha_k n^2] \lambda^2 \\
& + [(1 - 3m) \alpha_g + 4(1 - 3m) \alpha_k n^2] \lambda \\
& + [\alpha_g n^4 - n^2(2 - 3m) \alpha_g - 4n^2(1 - 3m) \alpha_k] = 0
\end{aligned} \quad (4.162)$$

在给出环形板物理常数  $E_r, E_\theta, G$  之后, 对任意选定的径向变厚度板  $m$  指数, 可由这一四次代数方程求出  $\lambda_1 \sim \lambda_4$  的根, 齐次方程(4.161)的解可以表示为

$$R(r) = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2} + Cr^{\lambda_3} + Fr^{\lambda_4} \quad (4.163)$$

更一般地, 可用因式分解或几何做图等方法求四次代数方程(4.162)的根。如果  $m=0$ , 即为常厚度各向异性板时, 式(4.162)的根为

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \left\{ \frac{\beta + 2\gamma n^2 + 1}{2} \pm \left[ \frac{1}{4} (\beta + 2\gamma n^2 + 1)^2 - \beta(n^2 - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} + 1 \quad (4.164)$$

式中,  $\beta = \frac{\alpha_g}{\alpha_r}, \gamma = \frac{\alpha_k}{\alpha_r}$ 。

具有  $q(r) \sin n\theta$  形式荷载的非齐次方程(4.160)的特解则不难求出。例如  $q(r)$  是幂级数, 那么特解也设成幂级数与  $\sin n\theta$  的乘积, 代入式(4.160)进行相应运算, 比较两边系数, 则得出特解  $w_0(r, \theta)$ 。当  $q(r)$  是常数时, 则有

$$w_0(r, \theta) = C_1 r^{-3m+4} \sin n\theta$$

由齐次方程的通解与非齐次方程的特解相加, 得出式(4.160)的全解, 即各向异性

非线性变厚环形板的解。由环形板的内外周边条件确定出该解式中的待定常数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $E$  值等。

$q(r)\cos n\theta$  荷载下的解法与此相同, 仅应注意将  $\cos n\theta$  代换  $\sin n\theta$  时的微分运算正负号。

## 4.9 正交异性环形板塑性极限分析

本节讨论正交异性环形板的塑性问题, 包括环形板的塑性应力计算和环形板的塑性极限分析。

圆柱型正交各向异性环形板的弹塑性弯曲, 也可采用 4.6 节中叙述的参数法进行分析, 但这里要采用各向异性屈服准则。Hill 给出了用主应力表示的各向异性屈服准则式

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 1 \quad (4.165)$$

式中,  $F$ 、 $G$ 、 $H$  为三维主应力方向各向异性特征参数。当  $F=G=H$  时, 上式即为各向同性材料屈服准则式——Mises 型屈服准则式。

在薄板理论中, 一般来说板的法向应力  $\sigma_3$  与板面内主应力  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  相比很小, 略去  $\sigma_3$  之后的式 (4.165) 变为平面应力状态下柱坐标各向异性屈服准则式

$$(G + H)\sigma_r^2 - 2H\sigma_r\sigma_\theta + (H + F)\sigma_\theta^2 = 1 \quad (4.166)$$

如果板厚为  $h$ , 板的弯矩与板内应力之间有

$$M_r = \frac{h^2}{4}\sigma_r \quad M_\theta = \frac{h^2}{4}\sigma_\theta \quad M_z = \frac{h^2}{4}\sigma_z$$

将材料常数设为

$$\left. \begin{aligned} G + H &= \frac{1}{\sigma_1^2} \\ \frac{2H}{G + H} &= K_1 \\ \frac{F + H}{G + H} &= K_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.167)$$

于是圆柱型正交异性环形板弯曲时的屈服准则式表示为

$$M_r^2 - K_1 M_r M_\theta + K_2 M_\theta^2 = M_0^2 \quad (4.168)$$

采用 4.6 节中参数法分析环形板的塑性时, 要引入一个坐标转换, 变换参数为  $\omega$ , 以形成标准化的椭圆方程。坐标变换式为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= M_0 \cos \omega - M_\theta \sin \omega \\ M_\theta &= M_r \sin \omega + M_\theta \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (4.169)$$

将式 (4.169) 代入式 (4.168), 如果令  $(K_2 - 1)\sin 2\omega - K_1 \cos 2\omega = 0$ , 并引入简化式



$$\frac{K_2 - 1}{\sqrt{(K_2 - 1)^2 + K_1^2}} = \cos\beta \quad \frac{K_1}{\sqrt{(K_2 - 1)^2 + K_1^2}} = \sin\beta$$

必然由此得出对转角  $\omega$  的要求,即

$$\begin{aligned} \sin(2\omega - \beta) &= 0 \\ \omega &= \frac{1}{2}(\pi + \beta) \end{aligned} \quad (4.170)$$

而形成的新坐标下的标准椭圆方程为

$$\frac{\frac{M_r^2}{M_\theta^2}}{\cos^2\omega - K_1\cos\omega\sin\omega + K_2\sin^2\omega} + \frac{\frac{M_\theta^2}{M_r^2}}{\sin^2\omega - K_1\sin\omega\cos\omega + K_2\cos^2\omega} = 1 \quad (4.171)$$

如果再引入记号  $p$  和  $q$ , 表示为

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega - K_1\cos\omega\sin\omega + K_2\sin^2\omega}} \\ q &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2\omega - K_1\sin\omega\cos\omega + K_2\cos^2\omega}} \end{aligned}$$

那么就会有原有坐标系下以参数  $\alpha$  表达的参数方程

$$\left. \begin{aligned} M_r &= M_i(p\sin\alpha - q\cos\alpha) \\ M_\theta &= M_i(p\cos\alpha + q\sin\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (4.172)$$

这里参数  $\alpha$  的含义同 4.6 节, 是转换新坐标系下椭圆方程的矢径与长半轴的夹角。在已知  $\beta$  情况下可以求出  $\omega$ , 最后形成式(4.172)的参数方程。

受纯弯曲的环形板平衡方程为

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = 0 \quad (4.173)$$

将式(4.172)代入上式中, 得出平衡条件为

$$\frac{dr}{r} = \frac{q\sin\alpha + p\cos\alpha}{(q - p)\sin\alpha + (p + q)\cos\alpha} d\alpha \quad (4.174)$$

引入以下积分公式:

$$\int \frac{p\sin x + q\cos x}{p_1\sin x + q_1\cos x} dx = Ax + B \ln|p_1\sin x + q_1\cos x| + C$$

式中,  $A$  和  $B$  是由运算而得出的系数,  $C$  为积分常数。参照这一积分公式, 式(4.174)给出

$$\frac{C^2}{r^2} = e^{-a}[(q - p)\sin\alpha + (p + q)\cos\alpha] \quad (4.175)$$

式中,  $C$  是由边界条件确定的。

式(4.175)即是圆柱型正交各向异性环形板的参数解。如设环形板外周边  $r = a$  处铰支, 在内周边  $r = b$  处有集度为  $m$  的弯矩作用, 那么由式(4.172)中得出  $\tan\alpha$ 。

$= \frac{q}{p}$ , 代入式(4.175)中获得常数  $C$  为

$$C^2 = a^2 e^{-\alpha} [(q-p)\sin\alpha_a + (q+p)\cos\alpha_a]$$

再将  $r=b$  代入已知  $C$  的参数方程(4.175)中, 得出

$$\frac{C^2}{b^2} = e^{-\alpha_b} [(q-p)\sin\alpha_b + (p+q)\cos\alpha_b]$$

解此超越方程, 可得出  $\alpha_b$ , 再由式(4.172)及  $r=b$  的  $M_r = m$ , 求出环形板弯曲时的塑性极限荷载为

$$m^p = M_s (p \sin \alpha_b - q \cos \alpha_b)$$

在塑性区的弯矩是由式(4.172)表达的, 它是由  $\alpha$  作中间参量, 给出对应  $r$  处的弯矩, 其计算方法同 4.6 节。在这里给出的弯矩是正交各向异性的。

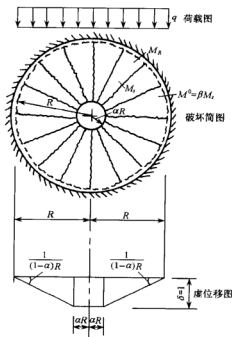


图 4.10 环形板破坏机构之一

情况往往发生在环向配筋较弱的板中。

设板中央圆孔的虚位移  $\delta=1$ , 则板变形下垂时所具有的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 \frac{1}{3(1-\alpha)} - \pi(\alpha R)^2 - \pi(\alpha R)^2 \times \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{1-\alpha} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 (1 + \alpha - 2\alpha^2) \end{aligned} \quad (4.176)$$

均布荷载  $q$  所做之外力功为

应当指出, 这里求出的塑性极限荷载属于静力法, 它是在满足平衡方程及边界条件基础上获得的。由于环形板的弹性分析已有文献给出, 所以这里也能进行弹塑性分析, 给出弹塑性交界处的界线。但由于正交各向异性材料对应的弹塑性交界线是非圆的, 求解它比较繁琐, 因此各向异性环形板的塑性弯曲通常限于极限分析。

下面用机动法分析环形板的极限应力。对结构工程中常见的混凝土板, 由于径向钢筋与环向钢筋不同, 将它视为正交异性板, 并按此极限分析进行钢筋混凝土环形板的设计。

图 4.10 表示环形板破坏机构的一种情况。板的破坏是由于在板的下部产生一系列以环形板中心为极点的向外辐射的正破坏线和在环形板上部沿支座边缘出现的一道负环形破坏线。这种

$$Vq = \frac{1}{3}\pi R^2 q(1 + \alpha - 2\alpha^2) \quad (4.177)$$

各梯形刚性板绕支座的转角为  $\frac{1}{(1-\alpha)R}$ , 从而支座环形破坏线的内力功  $W_1$  为

$$W_1 = 2\pi R M^0 \frac{1}{(1-\alpha)R} = 2\pi M_1 \frac{\beta_1}{1-\alpha} \quad (4.178)$$

放射向破坏线的内力功  $W_2$  为

$$W_2 = 2\pi R(1-\alpha)M_1 \frac{1}{(1-\alpha)R} = 2\pi M_1 \quad (4.179)$$

令内力功与外力功相等, 得出

$$M_1 = \frac{qR^2}{6} \left( \frac{1-3\alpha^2+2\alpha^3}{1-\alpha+\beta_1} \right) \quad (4.180)$$

由此求出极限荷载为

$$q = \frac{6M_1}{R^2} \left( \frac{1-\alpha+\beta_1}{1-3\alpha^2+2\alpha^3} \right) \quad (4.181)$$

式中, 假定环形板周边是夹支的, 夹支边单位弧长内的极限径向负弯矩为  $M^0$ , 记  $\beta_1$  为正交异性常数,

$$\beta_1 = \frac{M^0}{M_1}$$

当板周边为铰支时, 取  $\beta_1=0$ 。一般由于径向钢筋与环向负弯矩钢筋不等, 可按正交异性常数及弯矩值计算  $\beta_1$  值。

图 4.11 表示环形板的另一种破坏机构。板的破坏是由于下部出现一道半径为  $\alpha_c R$  的环形正破坏线 ( $\alpha < \alpha_c < 1$ ) 和一系列从该环形破坏线向外辐射的径向破坏线, 同时在板的上部沿支座边缘出现一道环形负破坏线。

当中央圆孔发生虚位移  $\delta=1$  时, 环形板下垂体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(1 + \alpha_c + \alpha_c^2 - 3\alpha^2)$$

荷载  $q$  所做的外力功为

$$Vq = \frac{1}{3}\pi R^2 q(1 + \alpha_c + \alpha_c^2 - 3\alpha^2) \quad (4.182)$$

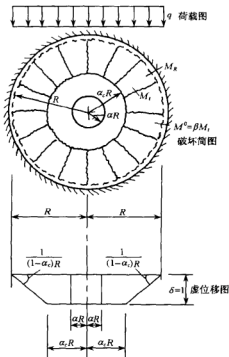


图 4.11 环形板破坏机构之二

各梯形刚性板绕支座的转角和绕中央节板的转角均为  $\frac{1}{(1-\alpha_c)R}$ , 破坏线内力功为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{(1-\alpha_c)R} \left[ 2\pi\alpha_c R \frac{R}{\alpha_c R} MR + 2\pi(1-\alpha_c)RM_i + 2\pi RM^0 \right] \\ &= \frac{2\pi}{1-\alpha_c} [M_R + (1-\alpha_c)M_i + M^0] \end{aligned} \quad (4.183)$$

由内、外力功相等, 得

$$M_R + M^0 + (1-\alpha_c)M_i = \frac{qR^2}{6} [1 - \alpha_c^2 - 3\alpha_c^2(1-\alpha_c)]$$

代入前一种破坏机构的  $M_i$ , 再由  $\frac{dM_R}{d\alpha_c} = 0$  的条件, 求出  $\alpha_c$  为

$$\alpha_c = \sqrt{\frac{1 + 3\beta_1\alpha^2 - \alpha^3}{3(1 - \alpha + \beta_1)}} \quad (4.184)$$

将  $\alpha_c$  代入前一式, 得出极限荷载

$$q = \frac{6(M_R + M^0)}{R^2(1 - 3\alpha_c^2 + 2\alpha_c^3)} \quad (4.185)$$

式中,  $M_R$  为环形板支承周边单位弧长内的名义径向弯矩;  $M_i$  为环向极限弯矩。板的下部配置径向和环向钢筋网, 径向钢筋为等直径、等间距布置。在半径为  $r$  处的单位弧长的径向弯矩为  $M_r$ , 则有

$$M_r = \left( \frac{R}{r} \right) M_R$$

以此  $M_R$  作为下部钢筋设计的依据。

在已知环形板结构尺寸及均布荷载  $q$  时, 按塑性设计方法进行环形板的配筋计算, 由以上公式先行确定出  $\beta_1$  值, 代入相应公式分别计算出  $M_i$ 、 $M^0 (= \beta_1 M_i)$  和  $M_R$  值。由  $M_i$  定出下部环向钢筋,  $M_R$  定出下部径向钢筋,  $M^0$  定出上部径向钢筋。上部环向钢筋可取上部径向钢筋的  $1/7 \sim 1/6$ 。

混凝土板厚先按正常工作状态下的不计算挠度变形条件选取。最后配筋结束后, 再由板的抗裂设计验算板厚。如板厚不足则需另加大板厚再行计算, 直至满足要求为止。

## 4.10 曲线形板塑性极限分析

在结构工程中, 经常会遇到正多边形板结构或曲线形板结构设计和计算。本节研究这些结构的非线性力学分析, 即塑性极限分析, 确定结构极限荷载和塑性设计方法。

对于周边为铰支承的任意多边形板, 可以利用机动法求它的塑性极限荷载的上限。当结构成为破坏机构时, 在板中会出现许多条直的塑性铰线。如果在板中某

点  $O$  处有集中荷载  $P$ , 板的破坏机构是以  $O$  点为顶点的角锥体, 其棱边即为塑性铰线。角锥体的高度为极限状态下  $O$  点的挠度, 类似于 4.9 节中环形板的破坏机构。由于在机构破坏时的挠度为小挠度, 因而可以认为角锥体棱边的长度近似等于其水平投影的长度。利用第三章中关于矩形板的相邻边相对转角计算方法, 在多边形中两相邻刚性板块转换角  $\theta_i$  为

$$\theta_i = \frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{b} \quad (4.186)$$

式中,  $\delta$  为  $O$  点挠度。其中  $a$  和  $b$  分别为

$$a = l_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad b = l_i \operatorname{tg} \beta_i$$

式中,  $\alpha_i, \beta_i$  为塑性铰线  $l_i$  与板边界夹角。

塑性极限弯矩  $M_s$  在所有塑性铰线上所做的内力功为

$$T_i = M_s \sum_{i=1}^n \theta_i l_i = M_s \delta \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) \quad (4.187)$$

式中,  $n$  为多边形的边数。

形成破坏机构时, 仅有集中荷载  $P$  作用下的外力做功为

$$T' = P\delta$$

由此求得极限荷载的上限为

$$P^{\pm} = M_s \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) \quad (4.188)$$

对于边长为  $a$  和  $b$  的周边铰支矩形板, 在板的中心处作用有集中力  $P$  时, 其  $P^{\pm}$  即极限荷载的上限值为

$$P^{\pm} = 4M_s \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

当板为正多边形, 而且集中力作用在板的中心处时, 由于  $\alpha_i = \beta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ , 所以极限荷载上限  $P^{\pm}$  为

$$P^{\pm} = 2\pi M_s \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 其极限荷载为  $2\pi M_s$ , 这与铰支圆板在圆心处受集中力所得的极限荷载相同。对于板作用的其他类型荷载, 例如均匀分布荷载  $q$ , 外力功的计算也类似, 它等于均布荷载  $q$  与破坏角锥体的体积的乘积。

如果任意多边形的周边为夹支, 如图 4.12 所示。该板在点  $O$  作用一集中力  $P$ , 其破坏机构和同样形状的周边铰支板的破坏机构完全相同。但是在计算内力功时, 除塑性极限

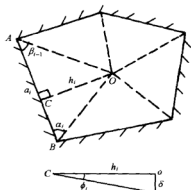


图 4.12 周边夹支多边形板

弯矩  $M_i$  在板的径向塑性铰线上做功外,还应包括极限弯矩在板周边上塑性铰线上所做之功。为计算在原来支边  $AB$  上的内力功,设  $O$  点的挠度为  $\delta$ ,则板  $AOB$  相对于  $AB$  的转角为

$$\phi_i = \frac{\delta}{h_i}$$

在  $AB$  上内力功为  $M_i \frac{\delta}{h_i} a_i$ , 在全部边界处塑性铰线上内力功为  $M_i \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{h_i} a_i$ 。

由图 4.12 中几何关系知

$$\frac{a_i}{h_i} = \operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i - 1$$

再加上径向线上的内力功,则总内力功为

$$T' = 2M_i \delta \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) \quad (4.189)$$

在形成破坏机构时,外力功为

$$T = P \delta \quad (4.190)$$

夹支边任意多边形的极限荷载上限为

$$P^{\pm} = 2M_i \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) \quad (4.191)$$

由此式可知,对同样形状的多边形板,周边夹支比周边铰支的极限荷载大一倍。

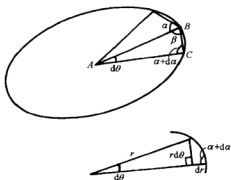


图 4.13 承受集中力铰支曲线形板

当  $n \rightarrow \infty$  时,式(4.191)改为  $4\pi M_i$ 。

均布荷载  $q$  作用下的周边夹支多边形板,其外力功的计算同周边铰支板。

类似地可以分析图 4.13 任意曲线形板的塑性极限荷载。该曲线形板为外凸的,周边铰支。在板内任一点  $A$  处有集中力  $P$  作用。为求其极限荷载,可用一内接多边形板来代替任意曲线形板。在夹角为  $d\theta$  的扇形内,塑性铰线为  $AB$  和  $AC$ ,由图 4.13 中可知

$$\beta = \pi - \alpha - d\alpha - d\theta$$

由此可得

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}(\alpha + d\alpha + d\theta)$$

假设  $A$  点的挠度为单位值时,利用前述计算塑性铰线上内力功的方法,在中心角为单位值时,极限弯矩在塑性铰线  $AB$  上的内力功为

$$T' = M_i \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{d\theta} \delta = M_i \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( 1 + \frac{d\alpha}{d\theta} \right) \delta \quad (4.192)$$

外力功的计算同前,由内外功相等得极限荷载上限为

$$P^{\perp} = M_i \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( 1 + \frac{d\alpha}{d\theta} \right) d\theta \quad (4.193)$$

若板的边界方程以极坐标表示时,即  $r=r(\theta)$ ,则由几何关系得

$$\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{r d\theta}{dr} = \frac{r}{r'}$$

由此得出

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{r}{r'} \quad \alpha' = \frac{r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2}$$

$$1 + \alpha' = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2}$$

并利用关系式

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{r'^2}{r^2}$$

则有

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = (1 + \alpha') d\theta \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \left( 1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\theta$$

因此,板的极限荷载上限为

$$P^{\perp} = M_i \int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\theta \quad (4.194)$$

该式又可进一步简化为

$$P^{\perp} = \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta M_i \quad (4.195)$$

这是因为

$$\int_0^{2\pi} \left( 1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\theta - \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 - r r''}{r^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d \left( \frac{r'}{r} \right) = \frac{r'}{r} \Big|_0^{2\pi} = \operatorname{ctg} \alpha \Big|_0^{2\pi} = 0$$

所以才有式(4.194)的表示。

利用这一结果可以求周边铰支圆板承受偏心集中力  $P$  时的极限荷载,其上限值为  $2\pi M_i \frac{a}{\sqrt{a^2 - e^2}}$ ,其中  $a$  为圆板半径,  $e$  为集中力作用点至圆心的偏心距。

依据结构塑性极限分析的机动法,参照 4.9 节中关于混凝土环形板的设计方法,可以进行钢筋混凝土多边形以及曲线形板在集中荷载、均布荷载、偏心荷载等作用下的结构塑性设计。由于方法类同,这是不再赘述。

## 第五章 非线性折板结构

### 5.1 矩形板的经典解法

矩形薄板是本章研究空间折板结构的单元结构,这里有必要先对矩形板的经典解法加以介绍。

如以  $w$  表示薄板的挠度,板的面内坐标为  $x, y$ , 在垂直于板面荷载  $q(x, y)$  作用下,板的挠度方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (5.1)$$

这一方程又可用平面拉普拉斯算子  $\nabla^2(\quad) = \frac{\partial^2(\quad)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\quad)}{\partial y^2}$  表示为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q \quad (5.2)$$

式中,  $D$  为板的抗弯刚度。

矩形板的边界支承有三种类型。

1) 铰支型。它是对挠度及弯矩的约束。如以  $x=0$  的边界为铰支承时, 则有

$$w|_{x=0} = 0$$
$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0$$

2) 夹支型。它是对挠度与转角的约束。如以  $x=0$  边界为夹支承时, 则有

$$w|_{x=0} = 0$$
$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0$$

3) 自由型。它给的是边界上的弯矩与横向剪力的已知条件。如以  $x=0$  边界为自由边时, 则有

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = \text{已知条件}$$
$$V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \Big|_{x=0} = \text{已知条件}$$

矩形薄板挠度方程(5.1)的经典解法是级数解,它又分为列维解法和纳维叶解法。例如图 5.1 中的周边铰支矩形板,边长分别为  $a$  与  $b$ ,其板面有垂直均布荷载  $q$ ,可以用列维解法求解,过程如下。

设板挠度  $w=w(x, y)$  可以分成



$$w = w_1 + w_2 \quad (5.3)$$

式中,  $w_1$  为非齐次方程(5.1)的特解;  $w_2$  则为方程(5.1)的齐次方程的通解。

在求解  $w_1$  的特解时, 可视为  $x$  方向狭长板受均匀荷载  $q$  作用下的挠度, 即  $w_1$  仅为  $x$  方向的函数, 于是将满足边界条件的级数

$$w_1 = \sum w_0 \sin \frac{m\pi x}{a}$$

代入方程(5.1)中, 求出  $w_0$  待定常数, 最后得出

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (5.4)$$

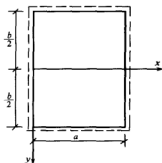


图 5.1 周边铰支矩形板

在求解方程(5.1)中的齐次方程通解时, 设定满足边界条件的带有待定函数的级数为

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (5.5)$$

将式(5.5)代入式(5.1)的齐次方程中, 得出

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ y_m^{(4)} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y_m^{(2)} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} y_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

必有

$$y_m^{(4)} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y_m^{(2)} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} y_m = 0$$

解之得出函数  $y_m$  为

$$y_m = \frac{qa^4}{D} \left( A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

式中,  $A_m, B_m, C_m, D_m$  为积分常数。如选择图 5.1 的板坐标关于  $x$  轴对称, 上式仅含有  $y$  的偶函数项, 积分常数  $C_m = D_m = 0$ 。将  $y_m$  代入  $w_2$  表达式, 得出挠度解为

$$w = w_1 + w_2 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (5.6)$$

再由周边铰支边界条件, 即

$$y = \pm \frac{b}{2} \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

可以确定出式(5.6)中的  $A_m$  与  $B_m$ 。最终  $w$  表达为

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m^5} \left[ 1 - \frac{(a_m \operatorname{th} a_m + 2)}{2 \operatorname{ch} a_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{2 a \operatorname{ch} a_m} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (5.7)$$

式中,  $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$ 。

在已知挠度  $w$  基础上,再由内力与挠度之微分关系可以求出弯矩  $M$  与横向剪力  $V$ 。这一公式参见本书第三章。

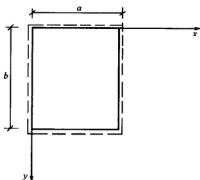


图 5.2 周边铰支矩形板

形板,边长分别为  $a$  和  $b$ ,按铰支条件有

$$\begin{aligned} w &= 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & x &= 0, a \\ w &= 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 & y &= 0, b \end{aligned}$$

则纳维叶方法选取的挠度函数  $w=w(x, y)$  为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.8)$$

式中,  $m$  和  $n$  是正整数。将这一  $w(x, y)$  表达式代入挠度方程(5.1)中,得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{q}{\pi^4 D} \quad (5.9)$$

为求出系数  $w_{mn}$ ,将荷载  $q=q(x, y)$  也展成类似的重三角级数,即有

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.10)$$

系数  $q_{mn}$  应采用多重傅里叶展开计算式

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (5.11)$$

将  $q(x, y)$  的展式代入挠度方程(5.9)中,比较系数后,可以求出  $w_{mn}$  为

$$w_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (5.12)$$

当荷载  $q(x, y)=q_0$  为常量,即矩形薄板受均布荷载时,计算出式(5.11)为

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$= \frac{4q_0}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)$$

于是有  $w_{mn}$  为

$$w_{mn} = \frac{16q_0}{D\pi^6 mn \left[ \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 3, 5, \dots \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{pmatrix}$$

最后得出在  $q_0$  垂直荷载作用下挠度  $w$  的表达式为

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 3, 5, \dots \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{pmatrix}$$

再依据挠度与内力如弯矩  $M_x, M_y, M_{xy}$ , 横向剪力  $V_x, V_y$  等的微分关系, 可以求出板中内力。与列维解相似, 这里的重三角级数的选取可根据边界支承条件变化。纳维叶解法的优点在于不论荷载情况如何, 都可利用傅里叶级数进行展开, 这样的级数运算比双曲函数简单。

广义地说, 矩形板的弯曲经典解法还不限于这两种, 本节仅举其代表性的两种解法作为理解矩形板弯曲的基础, 以便于读者理解非线性矩形折板结构的计算。

## 5.2 矩形板封闭折板结构

矩形板封闭折板结构通常应用于贮水、贮气等工程中, 这时的折板是竖向放置的, 上、下均有盖板和底板, 整体连接, 形成周边固支的矩形板封闭折板结构。如果上方是开口的, 则要简化成部分边界为铰支的矩形板。

矩形板封闭折板结构, 可以采用有限单元板力法进行分析。它是将封闭结构离散化, 每板视为一个计算单元, 取各板间相互连接的内力为基本未知量。即是假想在板的连接处切开, 代之以未知的连接处的弯矩, 再考虑转角处的位移协调, 形成以多余未知力为基本未知量、位移协调为条件的力法方程。由于每块板解除了板边的弯矩约束, 那么它变成了周边有力矩作用的铰支矩形板。而铰支矩形板在外荷载作用下的板边转角是可以精确求出的, 板在边缘力矩作用下的边缘转角也可由板的柔度公式求出。因此, 每块板在外荷载作用下以及边缘力矩作用下的棱边转角应当协调, 这就构成了力法方程。解此方程, 获得棱边力矩后, 各矩形板成外荷载及棱边力矩作用下的静定结构, 从而可以求出各板内力。

图 5.3 为矩形板封闭折板结构, 图中列出各板及棱边编号。如取板 A 和板 B 相交棱边来研究, 变形协调条件是两板在相交处产生同一转角。对于 A 板, 它是由 4 个棱边包围的, 取每棱边的未知弯矩分别为  $M_1, M_2, M_3, M_4$ 。同样对于 B 板, 有

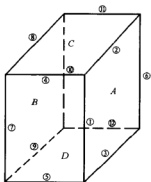


图 5.3 矩形封闭折板结构

$M_1, M_4, M_5, M_7$ 。整个结构共有 12 棱边, 则有  $M_1 \sim M_{12}$  个未知弯矩。

引入以下符号:

$\delta_{11}^A, \delta_{11}^B$ ——在棱边①上作用有单位力矩  $M_1$  时, 分别在板 A 和板 B 的相交棱边①产生的转角;

$\delta_{12}^A$ ——在棱边②上作用有单位力矩  $M_2=1$  时, 在板 A 相交棱边①上产生的转角;

$\theta_{1q}^A, \theta_{1q}^B$ ——外荷载  $q$  作用下, 板 A 和板 B 在相交棱边①产生的转角。

这样的表达方法对其他板、其他棱边都适用。

对于板 A 来说, 在①相交棱边产生的总转角用

$\theta_1^A$  表示, 有

$$\theta_1^A = \delta_{11}^A M_1 + \delta_{12}^A M_2 + \delta_{13}^A M_3 + \delta_{16}^A M_6 + \theta_{1q}^A \quad (5.13)$$

类似地, 写出  $\theta_1^B$  即 B 板在相交棱边①产生的总转角为

$$\theta_1^B = \delta_{11}^B M_1 + \delta_{14}^B M_4 + \delta_{15}^B M_5 + \delta_{17}^B M_7 + \theta_{1q}^B \quad (5.14)$$

由于板 A 与板 B 在相交棱边①处刚性相接, 无相对转角, 那么可以列出变形协调关系为

$$\theta_1^A + \theta_1^B = 0 \quad (5.15)$$

代入  $\theta_1^A$  与  $\theta_1^B$  的分量表达, 可以综合成如下一个力法方程:

$$\delta_{11} M_1 + \delta_{12} M_2 + \delta_{13} M_3 + \delta_{14} M_4 + \delta_{15} M_5 + \delta_{16} M_6 + \delta_{17} M_7 + \theta_{1q} = 0 \quad (5.16)$$

式中

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \delta_{11}^A + \delta_{11}^B & \delta_{12} &= \delta_{12}^A & \delta_{13} &= \delta_{13}^A \\ \delta_{14} &= \delta_{14}^B & \delta_{15} &= \delta_{15}^B & \delta_{16} &= \delta_{16}^A \\ \delta_{17} &= \delta_{17}^B & \theta_{1q} &= \theta_{1q}^A + \theta_{1q}^B \end{aligned}$$

式(5.16)中出现的力矩, 即是相应棱边的未知弯矩。

一般的封闭折板结构有上盖与底板。这时封闭矩形折板结构共有 12 个棱边, 应当有 12 个未知力矩, 可以列出 12 个变形连续条件方程式, 即力法方程有 12 个。如果考虑结构与荷载的对称性, 也就是各侧向矩形板所受荷载相同时, 边缘力矩会有如下关系:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_6 = M_7 = M_{10} & M_2 &= M_8 \\ M_3 &= M_9 & M_4 &= M_{11} & M_5 &= M_{12} \end{aligned}$$

这样的封闭折板结构的未知力矩的数目减至 5 个, 可以列出独立的力法方程为

$$\delta_{ij} M_j + \theta_{iq} = 0 \quad (i, j = 1 \sim 5) \quad (5.17)$$

式中,  $\delta_{ij}$  为矩形折板结构由  $M_j=1$  作用下, 在相交棱边①引起的转角;  $\theta_{iq}$  为外荷载

作用下在①相交棱边引起的转角。

以上各系数的具体表达式如下：

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} &= \delta_{11}^A + \delta_{11}^B + \delta_{16}^A + \delta_{17}^B & \delta_{12} &= \delta_{12}^A & \delta_{13} &= \delta_{13}^A \\
 \delta_{14} &= \delta_{14}^B & \delta_{15} &= \delta_{15}^B & \theta_{1q} &= \theta_{1q}^A + \theta_{1q}^B \\
 \delta_{21} &= \delta_{21}^A + \delta_{26}^A & \delta_{22} &= \delta_{22}^A + \delta_{22}^C + \delta_{28}^C & \theta_{2q} &= \theta_{2q}^A + \theta_{2q}^C \\
 \delta_{33} &= \delta_{33}^A + \delta_{33}^D + \delta_{39}^D & \delta_{34} &= 0 & \delta_{35} &= \delta_{35}^D + \delta_{3,12}^D \\
 \delta_{31} &= \delta_{31}^A + \delta_{36}^A & \delta_{32} &= \delta_{32}^A & \theta_{3q} &= \theta_{3q}^A + \theta_{3q}^D \\
 \delta_{41} &= \delta_{41}^B + \delta_{47}^B & \delta_{42} &= \delta_{42}^C + \delta_{48}^C & \delta_{43} &= 0 \\
 \delta_{44} &= \delta_{44}^B + \delta_{44}^C + \delta_{4,11}^C & \delta_{45} &= \delta_{45}^B & \theta_{4q} &= \theta_{4q}^B + \theta_{4q}^C \\
 \delta_{51} &= \delta_{51}^B + \delta_{57}^B & \delta_{52} &= 0 & \delta_{53} &= \delta_{53}^D + \delta_{59}^D \\
 \delta_{54} &= \delta_{54}^B & \delta_{55} &= \delta_{55}^B + \delta_{55}^D + \delta_{5,12}^D & \theta_{5q} &= \theta_{5q}^B + \theta_{5q}^D
 \end{aligned}$$

以上这些系数  $\delta_{ij}$ ，是各矩形板在周边铰支条件下，由单位边缘力矩作用下的边缘转角。称  $\delta_{ij}$  为各板的柔度系数。按 5.1 节矩形薄板理论，周边铰支矩形板的挠度可用级数表达，挠度对坐标的一阶导数则为转角。在单位力矩作用下矩形板的各边缘中点的转角计算式为

$$\text{本边} \quad \delta_{ij} = \frac{a}{2\pi D} \frac{\text{sh}2\beta - 2\beta}{\text{ch}2\beta - 1} \quad (5.18)$$

$$\text{对边} \quad \delta_{ij} = \frac{a}{\pi D} \frac{\beta \text{ch}\beta - \text{sh}\beta}{\text{ch}^2\beta - 1} \quad (5.19)$$

$$\text{邻边} \quad \delta_{ij} = \frac{b}{\pi D} \frac{\text{sh}(\beta/2)}{\text{ch}^2(\beta/2)} \quad (5.20)$$

式中， $a$  为该矩形板作用力矩的边长； $b$  为该矩形板邻边长； $\beta = \frac{\pi b}{a}$ ； $D$  为该板的抗弯刚度。

如果矩形板的封闭折板结构是一端开口的，例如顶部是无盖的，那么该折板结构按荷载对侧板的对称性分析，仅有 3 个独立的棱边力矩，即  $M_1$ 、 $M_3$ 、 $M_5$ 。从而形成三元的方法方程，计算还会简化。

求解力法方程(5.17)之后，就可以获得各板边缘的连接力矩。离散化的各矩形板，除了每块板上有外荷载  $q$  作用外，还有边缘力矩  $M$  的作用。按周边铰支矩形板的解析理论，可以求出外荷载  $q$  以及边缘力矩  $M$  共同作用下的各板内力。

应当指出，这里所给出的封闭折板计算，主要针对各矩形板两边之比不太大的情况。一般地，矩形板两边长  $a$  与  $b$  之比在  $1/2 \sim 2$  之间，且由多块矩形板组成的封闭矩形折板结构，如建筑工程中的贮水、贮物等结构，各棱边的边缘力矩表达为该边中点的边缘力矩，在荷载变化不大时，这样的力矩对全棱边误差不大，但对板的角部区域，有一定误差。

在均布荷载  $q$  作用下,周边铰支矩形板的挠度方程按 5.1 节叙述,可取

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.21)$$

式中

$$w_{mn} = \frac{16q}{mn\pi^2 D(a_n^2 + \beta_m^2)}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{a}$$

其中,  $a, b$  分别为矩形板在  $x, y$  方向边长。

对三角形的静水压力的线性变化荷载,例如  $q = \frac{q_0 x}{a}$ , 表示在  $x$  方向呈线性变化的荷载,坐标仍选在板的中点,挠度函数可表示为

$$w = \frac{2q_0 a^4}{D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[ \frac{2(-1)^{\frac{m}{2}+1}}{\pi^5 m^5} - \frac{(2 + \alpha_m \tanh \alpha_m)(-1)^{\frac{m}{2}+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m} \right. \\ \left. \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (5.22)$$

式中,  $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$ 。

前面给出的力法方程系数  $\theta_{ij}$  的具体解法,即是基于这些挠度表达,再分别取其一阶导数代入中点坐标而得出转角。

这里应着重说明力法方程系数及结果的正负问题。侧板受内压作用时,各  $\delta_{ij}$  的符号可任意选取,再按这一基本条件选定外荷载作用时的  $\theta_{ij}$ 。例如选定侧板向外弯矩作用,那么各  $\delta_{ij}$  均为正号,而内压作用下的  $\theta_{ij}$  则为负号,各侧板的棱边最后弯矩则为正号。而如果底板各边均取向内作用的弯矩,那么  $\delta_{ij}$  及  $\theta_{ij}$  在底板均取正号,所得的弯矩最后为负值,表示底板周边的负弯矩。

**算例 5.1** 有一个上端开口的封闭折板结构,由四个侧板与一个底板组成的贮液池,侧板边长分别为  $7\text{m} \times 3\text{m}$  与  $5.25\text{m} \times 3\text{m}$ ,底板为  $7\text{m} \times 5.25\text{m}$ 。在装满水时求各棱边的  $M$  值。

**解** 按图 5.3 分析,由于对称性,使未知棱边弯矩总数为 5,另外由于上端开口,使未知棱边弯矩在这里仅为 3,即图 5.3 中  $M_1, M_3, M_5$ 。

计算各柔度系数,对  $7\text{m} \times 3\text{m}$  的板,有

$$\delta_{11}^I = 0.1591 \frac{H}{D} \quad \delta_{13}^I = 0.1513 \frac{H}{D}$$

$$\delta_{33}^I = 0.2695 \frac{H}{D} \quad \delta_{31}^I = 0.038 \frac{H}{D}$$

$$\delta_{16} = 0.0013 \frac{H}{D} \quad \theta_1 = -0.2399 \frac{H^3}{D} \quad \theta_3 = -0.5598 \frac{H^3}{D}$$

对  $5.25\text{m} \times 3\text{m}$  的侧板,有

$$\delta_{11}^2 = 0.1193 \frac{H}{D} \quad \delta_{31} = 0.07 \frac{H}{D}$$

$$\delta_{35}^2 = 0.236 \frac{H}{D} \quad \delta_{15} = 0.1163 \frac{H}{D}$$

$$\delta_{17} = 0.0059 \frac{H}{D} \quad \theta_1 = -0.2547 \frac{H^3}{D} \quad \theta_3 = -0.4457 \frac{H^3}{D}$$

对  $7\text{m} \times 5.25\text{m}$  的底板,有

$$\delta_{33}^3 = 0.3461 \frac{H}{D'} \quad \delta_{39} = 0.099 \frac{H}{D'}$$

$$\delta_{35} = 0.1748 \frac{H}{D'} \quad \delta_{55}^3 = 0.2776 \frac{H}{D'}$$

$$\delta_{53} = 0.259 \frac{H}{D'} \quad \delta_{5,12} = 0.027 \frac{H}{D'}$$

$$\theta_3 = 0.6611 \frac{H^3}{D'} \quad \theta_5 = 0.4958 \frac{H^3}{D'}$$

式中,  $H$  为水池高度,这时  $H=3\text{m}$ ,底板承受水压以及侧板最大水压按  $30\text{kN/m}^2$  计,另外考虑底板承受均匀地基反力  $5.76\text{kN/m}^2$ ;  $D$  为侧板的抗弯刚度,其值为  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ;  $h$  为侧板厚;  $E$  为侧板材料的弹性模量,  $D'$  为底板抗弯刚度。如果侧板与底板厚度相同,可以组成如下的求解矩阵方程:

$$\frac{H}{D} \begin{bmatrix} \delta_{11}^1 + \delta_{11}^2 + \delta_{16} + \delta_{17} & \delta_{13} & \delta_{15} \\ \delta_{31} + \delta_{31} & \delta_{33}^1 + \delta_{33}^3 + \delta_{39} & \delta_{35} + \delta_{35} \\ \delta_{51} + \delta_{51} & \delta_{53} + \delta_{53} & \delta_{55}^2 + \delta_{55}^3 + \delta_{5,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_3 \\ M_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \frac{H^3}{D} = 0$$

可以求出

$$M_1 = 16.14\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_3 = -0.99\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_5 = -4.09\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

如果底板厚与侧板厚不同,这里的计算过程仍然相同,只是注意到  $D$  与  $D'$  不同罢了。

以上所求的是棱边的弯矩,每块侧板或底板成为四边铰支板,承受边弯矩与板面荷载,每块板的内力容易计算出来。

关于结构的配筋计算等进一步设计可参阅特种结构方面的参考书。

### 5.3 变厚度矩形板封闭折板结构<sup>1)</sup>

如果组成封闭矩形折板结构的各矩形板厚度不是常厚度,而是变厚度的,则是本节研究的变厚度矩形板封闭折板结构。这在建筑工程中的贮藏等结构中有较多应用。如图 5.3 中,各侧板均在竖向呈线性变化,选取  $y$  为各板竖向坐标时则有侧矩形板厚度公式

$$h = h_0 \left[ 1 + \lambda \left( \frac{2y}{H} - 1 \right) \right] \quad (5.23)$$

式中,  $h_0$  为板顶厚;  $H$  为各矩形板在竖向的高度(长度);  $\lambda$  为反映厚度变化的特征因子。

对于变厚度矩形薄板,其平衡方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (5.24)$$

在矩形板厚呈线性变化时,板的抗弯刚度  $D$  表示为

$$D = D_0 \left[ 1 + \lambda \left( \frac{2y}{H} - 1 \right) \right]^3 \quad (5.25)$$

其中

$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1 - \mu^2)}$$

在变厚矩形板情况下,平衡方程(5.24)具体表示为

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \nabla^2 D \nabla^2 w \\ - (1 - \mu) \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - q = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

式中,  $\nabla^4$ 、 $\nabla^2$  分别为重调和算子和调和算子。

为求解以上方程,将挠度  $w$  表示成

$$w = \sum_{n=1,2,3,\dots} w_n \lambda^n \quad (5.27)$$

式中,  $w_n$  仅是  $x$  和  $y$  的函数。将这一  $w$  解代入变厚板的平衡方程(5.26)中,由等式左边  $\lambda$  的各次幂的系数等于零,得出

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_1 &= q/D_0 \\ \nabla^2 w_2 &= -3 \left[ \frac{4}{H} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_1 + \left( \frac{2y}{H} - 1 \right) \nabla^4 w_1 \right] \\ \nabla^2 w_3 &= -3 \left[ \frac{4}{H} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_2 + \left( \frac{2y}{H} - 1 \right) \nabla^4 w_2 \right] \end{aligned}$$

1) 贾乃文. 线性变厚度矩形水池池壁单元位移解. 特种结构, 1988 年 3 期



$$\begin{aligned}
& -3\left\{\frac{8}{H^2}\left[\nabla^2 w_1 - (1-\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right] \right. \\
& \left. + \frac{8}{H}\left(\frac{2y}{H} - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w_1 + \left(\frac{2y}{H} - 1\right)^2\nabla^4 w_1\right\} \\
& \dots
\end{aligned} \tag{5.28}$$

在求解方程(5.28)时,先在满足边界条件下由第一方程解出  $w_1$ ;然后将  $w_1$  代入第二方程,在满足边界条件下解出  $w_2$ ;如此进行,最后将求出的各  $w_n$  叠加,即为  $w$  解。一般工程问题中仅取前两项,所得  $w$  值已够精确。

变厚度矩形板封闭折板结构也可像 5.2 节那样采用单元板力法求解。这里采用另一种有限单元板方法——单元板位移法求解。

矩形板封闭折板结构的单元板位移法,认为相交棱边转角是由相交各板的棱边力矩产生的。各板相交棱边的假想约束去除后,各板的总不平衡力矩产生与实际状态相符的棱边总转角。先用棱边的平衡条件求得这个未知总转角,进而可以求得各相交板的边缘力矩。这便将每矩形板的受力状态变为已知,从而可求出各板内力。

单元板位移法基本方程为

$$[K]_i\{\phi\}_i + M_{pi} = 0 \tag{5.29}$$

$$M_{pi} = \sum_{j=1}^n M_{pi}^j$$

式中,  $M_{pi}$  为第  $i$  个矩形板相交棱边的不平衡力矩;  $M_{pi}^j$  为第  $i$  个相交棱边的  $j$  板在这  $i$  边的固端力矩;  $[K]_i$  为交于第  $i$  个相交棱边的各单元板总刚度;  $\{\phi\}_i$  为交于第  $i$  个相交棱边的各单元板转角。求解上面的基本方程,可得各相交棱边的转角值,由此得棱边各板的抵抗力矩为

$$[K]_i^j\{\phi\}_i^j = \{M_d\}_i^j \tag{5.30}$$

式中,  $[K]_i^j$  为相交棱边  $i$  的单元板  $j$  的刚度矩阵;  $\{\phi\}_i^j$  为相交棱边  $i$  的单元板  $j$  的边缘转角向量;  $\{M_d\}_i^j$  为相交棱边  $i$  的单元板  $j$  的边缘抵抗力矩。将各矩形板求出的边缘抵抗力矩与相应的固端力矩叠加,则可得到单元板各边缘的真实力矩。

每矩形板的固端力矩解法为:在封闭折板去除约束后,各矩形板则为周边铰支矩形板。如在  $y=0$  边作用有  $M = \sin \frac{m\pi x}{a}$  力矩时,可按列维法取板挠度表达式为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{5.31}$$

式中,  $Y_m$  是  $y$  的任意函数,  $m$  取正整数;  $a$  为  $x$  方向板宽;  $H$  为板高。如取第一项,则

$$w_1 = Y_1 \sin \frac{\pi x}{a}$$

将这一  $w_1$  代入  $\nabla^4 w_1 = q/D$  方程, 齐次解则为

$$Y_1 = A_1 \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + C_1 \frac{\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + E_1 \frac{\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \quad (5.32)$$

在简支边界条件下, 由边界条件

$$\begin{aligned} (w_0)_{y=0} &= 0 & (w_1)_{y=H} &= 0 \\ \left( -D_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= \sin \frac{\pi x}{a} & \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)_{y=H} &= 0 \end{aligned}$$

可以求出待定常数  $A_1, B_1, C_1$  及  $E_1$ :

$$A_1 = \frac{aH}{2D_1\pi} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi H}{a}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi H}{a}} \right]$$

$$B_1 = 0$$

$$C_1 = \frac{-a^2}{2D_1\pi^2}$$

$$E_1 = \frac{a^2}{2D_1\pi^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi H}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{a}}$$

式中,  $D_1 = (1-\lambda)^3 D_0$ 。

同样地, 设  $w_2 = Y_1 \sin \frac{\pi x}{a}$ , 则有

$$\begin{aligned} Y_1 = & G_1 \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + F_1 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + H_1 \frac{\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + I_1 \frac{\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \\ & - \frac{3\pi}{aH} y^2 \left( C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + E_1 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

利用上述的周边铰支条件, 求得各常数为

$$G_1 = \frac{aH}{\pi D_1} \left[ \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi H}{a}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi H}{a}} - 1 \right]$$

$$F_1 = 0$$

$$H_1 = \frac{a^2}{2D_1\pi^2} \left[ \frac{3a}{H\pi} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi H}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{a}} - 1 \right]$$

$$I_1 = \frac{a^2}{2D_1\pi^2} \left[ \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi H}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{a}} - \frac{3a}{\pi H} \right]$$

这样可以取满足精度要求的  $w$  为

$$w = w_1 + \lambda w_2$$

将  $w$  分别对  $y$  及  $x$  取一阶导数, 代入相应的边缘坐标后, 即为板边缘的转角。这里分别用  $\alpha_{ij}$  表示单位力矩的转角。

用位移法求解变厚度矩形板封闭折板结构时, 每块矩形板在周边铰支条件下的转角方程为

$$\begin{bmatrix} M_1 & -M_2 & M_3 & -M_4 \\ -M_1 & M_2 & -M_3 & M_4 \\ M_1 & -M_2 & M_3 & -M_4 \\ -M_1 & M_2 & -M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

式中,  $M_1, M_2, M_3, M_4$  表示作用于矩形板四周的力矩;  $\phi_1 \sim \phi_4$  表示 4 个周边的转角。例如当①边有单位转角, 其他边缘转角为零时, 则从式(5.34)得出

$$\begin{aligned} M_1\alpha_{11} - M_2\alpha_{12} + 2M_3\alpha_{13} &= 1 \\ -M_1\alpha_{21} + M_2\alpha_{22} - 2M_3\alpha_{23} &= 0 \\ M_1\alpha_{31} - M_2\alpha_{32} + M_3(\alpha_{33} + \alpha_{43}) &= 0 \end{aligned}$$

因对称性条件给出  $M_4 = -M_3$ , 上面归结为 3 个方程。解此方程组, 可以得出板的刚度系数:

$$K_{11} = M_1 = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{33} + \alpha_{43}) - 2\alpha_{32}\alpha_{23}}{(\alpha_{33} + \alpha_{43})(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) - 2\alpha_{23}(\alpha_{32}\alpha_{11} - \alpha_{31}\alpha_{12}) + 2\alpha_{13}(\alpha_{32}\alpha_{21} - \alpha_{31}\alpha_{22})} \quad (5.35)$$

$$K_{21} = \frac{\alpha_{21}(\alpha_{33} + \alpha_{43}) - 2\alpha_{31}\alpha_{23}}{\alpha_{22}(\alpha_{33} + \alpha_{43}) - 2\alpha_{32}\alpha_{23}} K_{11} \quad (5.36)$$

$$K_{31} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}}{\alpha_{22}(\alpha_{33} + \alpha_{43}) - 2\alpha_{32}\alpha_{23}} K_{11} \quad (5.37)$$

$$K_{41} = -K_{31} \quad (5.38)$$

同样可以得出板的其他刚度系数  $K_{21}, K_{22}$  等。其中可利用结构及荷载对称性得  $K_{14} = K_{13}, K_{24} = K_{23}, K_{34} = K_{43}, K_{33} = K_{44}$ , 即可建立刚度矩阵  $[K_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ 。

如果各侧板受外荷载是在  $y$  方向线性变化的, 即取  $q = \frac{y}{H} q_0$ , 这时求挠度方程的特解, 取

$$w_1 = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{H}$$

$$w_2 = A_{22} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{H}$$

代入方程(5.26)求出  $w_1$  与  $w_2$  之后, 得特解挠度为

$$w = \frac{8q_0}{\pi^6 D_0 (1/a^2 + 1/H^2)^2} \left[ 1 + 3\lambda \left( \frac{8}{\pi^2} - 1 \right) \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{H}$$

由此进而求其一阶导数,得各边缘转角  $\theta_i$ 。依据每块板有

$$[K]^e \{\theta\}^e = \{M_F\}^e \quad (5.39)$$

上式能够求出这块矩形板边缘的各固端力矩。式中,  $[K]^e$  为单元板刚度矩阵;  $\{\theta\}^e$  为单元板外荷载作用时边缘转角;  $\{M_F\}^e$  为单元板周边固端力矩。

用单元板位移法分析变厚度矩形板封闭折板结构时,首先由本节中各  $K_{ij}$  公式计算各板刚度,然后由外荷载计算边缘转角,再由(5.39)计算固端力矩。再计算出各相交棱边的不平衡力矩,由式(5.29)计算转角,再依次由式(5.30)计算抵抗力矩。最后将抵抗力矩与固端力矩相加,即为单元板的各边缘力矩。各矩形板变成周边铰支,在周边力矩和外荷载作用下的矩形板的内力不难求出。

计算表明,变厚度板的竖向弯矩随板厚的增加而增大,而竖向棱边的水平弯矩减小很多,说明厚度变化带来内力的影响不可忽视。

而板厚的增大随之带来弯矩增加,说明板厚增加带来内力分布的改变,这在板的抗裂及裂宽计算中是有益的。板厚增加并不减少内力,这一点往往与人们的主观想法不尽一致,是值得设计者注意的。

**算例 5.2** 设计图 5.4 所示尺寸的矩形贮水池。池壁为变厚度,壁顶厚为 12cm,壁底厚为 18cm。 $\lambda=0.2$ ,池顶板厚取 12cm,池底板厚取 18cm。荷载为分布荷载,顶板受  $q_1=6.12\text{kN/m}^2$ ,底板受  $q_2=50.93\text{kN/m}^2$ 。侧板受三角形水压最大值为  $35\text{kN/m}^2$ 。

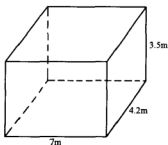


图 5.4 矩形贮水池

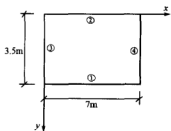


图 5.5 长侧板棱边编号

**解** 1) 先计算刚度。

$$\text{顶板} \quad D_1 = \frac{2.6 \times 10^5 \times 12^3}{12(1 - 1/6)} = 385 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$\text{池壁} \quad D_0 = 752 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$\text{底板} \quad D_2 = 1300 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

长 7m、高 3.5m 侧板的刚度系数(按图 5.5 中编号)为

$$K_{11} = 10.71 \times \frac{752 \times 10^6}{7 \times 10^3} = 11.50 \times 10^5$$

$$K_{21} = 0.17 \times 11.5 \times 10^5 = 1.96 \times 10^5$$

$$K_{41} = 2.69 \times 10^5$$

$$K_{22} = 5.20 \times \frac{752 \times 10^6}{7000} = 5.59 \times 10^5$$

$$K_{12} = 0.501 \times 5.59 \times 10^5 = 2.80 \times 10^5$$

$$K_{32} = 0.289 \times 5.59 \times 10^5 = 1.62 \times 10^5$$

$$K_{33} = 11.05 \times \frac{752 \times 10^6}{7000} = 11.87 \times 10^5$$

$$K_{43} = -0.034 \times 11.87 \times 10^5 = -0.404 \times 10^5$$

$$K_{13} = -0.013 \times 11.87 \times 10^5 = -0.154 \times 10^5$$

$$K_{23} = 0.109 \times 11.87 \times 10^5 = 1.29 \times 10^5$$

再利用对称性,可计算出其他刚度系数,组成单元刚度矩阵

$$[K]^e = \begin{bmatrix} 11.50 & 2.80 & -0.154 & 0.154 \\ 1.69 & 5.59 & 1.29 & -1.29 \\ -2.69 & 1.62 & 11.87 & -0.404 \\ 2.69 & -1.62 & -0.404 & 11.87 \end{bmatrix} \times 10^5$$

其他的侧板如 4.2m×3.5m 的也可类似求出。

2) 求固端力矩。

对受力的侧板,周边按铰支考虑,获得各边缘转角分别为

$$\theta_y = 296.8 \times 10^{-5}$$

$$\theta_x = 148.4 \times 10^{-5}$$

则由

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.50 & 2.80 & -0.154 & 0.154 \\ 1.69 & 5.59 & 1.29 & -1.29 \\ -2.69 & 1.62 & 11.87 & -0.404 \\ 2.69 & -1.62 & -0.404 & 11.87 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -296.8 \\ 296.8 \\ -148.4 \\ 148.4 \end{Bmatrix}$$

$$= [-2536, 694, -542, 542]^T$$

可计算出相应的短侧板弯矩(按图 5.6 编号):

$$\begin{Bmatrix} M_5 \\ M_6 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1927 \\ -252 \\ 798 \\ -798 \end{Bmatrix}$$

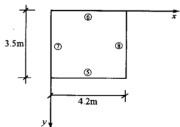


图 5.6 短侧板棱边编号

$$\begin{bmatrix} 23.3 & 2.80 & -0.308 & -4.3 & 0 \\ 1.96 & 9.09 & 2.58 & 0 & -1.27 \\ -2.69 & 1.62 & 25.7 & -3.90 & 2.33 \\ -8.81 & 0 & -2.7 & 37.8 & 1.87 \\ 0 & -2.61 & 7.62 & 0.02 & 14.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4588 \\ -1550 \\ -256 \\ 3203 \\ 868 \end{Bmatrix} \times 10^{-5}$$

由此解出与编号相对应的转角为

$$\theta_1 = -175.3 \times 10^{-5} \quad \theta_2 = -120.4 \times 10^{-5}$$

$$\theta_3 = -19.1 \times 10^{-5} \quad (\theta_3 = \theta_4 = \theta_7 = \theta_8)$$

$$\theta_5 = 40.1 \times 10^{-5} \quad \theta_6 = 49.0 \times 10^{-5}$$

#### 4) 确定板边缘弯矩。

由各转角值可以计算出板边缘的抵抗力矩，再加上固端力矩，即得出最后板边缘力矩。与编号相对应的弯矩值为

$$M_1 = -48.8 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_2 = -3.72 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = -5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (M_3 = M_4 = M_7 = M_8)$$

$$M_5 = 72.14 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_6 = -0.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

这样就将每块板化成周边铰支、受外荷载及周边力矩作用的结构形式，其板内的内力不难计算，或直接从手册中查出，再进行各板的配筋设计和其他结构计算。

## 5.4 拱与拱型折板结构

拱是一种结构。由于拱结构比梁更有效地发挥材料的作用，因此它适用于较大跨度的建筑屋面，亦能承受较重的荷载。拱主要承受压力，可以充分利用抗压性能较好的材料如砖、石、混凝土等进行建造。拱结构的一般计算如三铰拱、两铰拱已经在结构力学教材中有所讲述。

当拱的压力线与拱轴线重合时，各截面的弯矩为零，拱处于无弯矩状态。此时各截面只受轴力作用，正应力沿截面均匀分布，材料的使用最经济。在均匀分布的竖向荷载作用下，三铰拱如图 5.7 所示，其任一截面弯矩  $M$  表示为

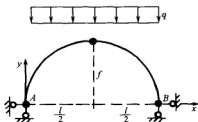


图 5.7 三铰拱

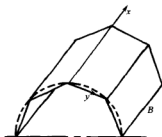


图 5.8 拱型折板

$$M = M^0 - Hy \quad (5.40)$$

式中,  $M^0$  为相应 AB 简支梁弯矩;  $H$  为底部水平推力。如使  $M=0$ , 则有

$$y = \frac{M^0}{H} = \frac{4f}{l^2}(l-x) \quad (5.41)$$

显然, 这时的合理拱轴是一抛物线。

如果三铰拱承受均匀正压力  $q$ , 它的合理拱轴是圆曲线。

以拱轴为外接曲线的拱型折板结构(图 5.8), 由于造型美观、受力合理、制作方便, 是建筑结构可以推广的屋面结构。它比拱的施工制作方便, 且以抛物线等合理拱轴为基础的拱板结构棱边弯矩较小, 可以经济地使用混凝土等受压强度高的材料。因此拱板结构是建筑也是结构。

下面对无铰拱进行力学分析。如图 5.9 所示, 取简支曲梁作为基本结构, 将荷载作用下超静定多余未知力转化为弹性中心上多余未知力。在恒载作用下表示为  $H_g, M_g$  和  $V_g$ ; 而在活载作用下表示为  $H_x, M_x$  和  $V_x$ 。图 5.9 中  $y_0$  表示弹性中心至拱顶距离,  $f$  表示拱的矢高,  $l$  表示半跨拱长。

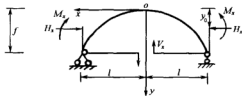


图 5.9 无铰拱分析图

如果考虑水平推力对挠度的影响, 恒载作用下拱中任一截面的弯矩表达式为

$$M = M_g + H_g[y_0 - (y + w)] + \bar{M}_g \quad (5.42)$$

式中, 考虑恒载与结构对称性, 取  $V_y=0$ ;  $\bar{M}_g$  表示与拱同跨简支梁上恒载产生的弯矩。

由拱的挠度理论方程可知, 在不计温度影响时, 恒载作用下的挠度表达式为

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{H_g}{EI}w \sec \phi$$

$$= -\frac{\sec\phi}{EI} [M_x + H_x(g - y_0) + \bar{M}_x] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_x}{EA} \tan\phi \right) \quad (5.43)$$

式中,  $N_x$  为拱轴任意点的轴向力;  $\phi$  为拱轴线切线方向与水平线之夹角。

如果拱所受的外荷载是均匀水平压力, 式(5.43)也表达了恒载与外载共同作用下的挠度方程。

用力法求解这一超静定无铰拱结构。取  $y_0 = \int_{-1}^1 x dS / \int_{-1}^1 dS$ , 那么力法方程为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} H_x + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{22} M_x + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{33} V_x + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

根据熟知的结构力学公式

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_s \frac{M_1^2}{EI} dS & \Delta_{1p} &= \int_s \frac{M_1 \bar{M}}{EI} dS \\ M_1 &= y - y_0 & M_2 &= 1 & M_3 &= x \end{aligned}$$

求解方程(5.44)得

$$H_x = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{-\int_{-1}^1 (y - y_0) \bar{M} \sec\phi dx}{\int_{-1}^1 (y - y_0)^2 \sec\phi dx} \quad (5.45)$$

$$M_x = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = \frac{-\int_{-1}^1 \bar{M} \sec\phi dx}{\int_{-1}^1 \sec\phi dx} \quad (5.46)$$

$$V_x = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = \frac{-\int_{-1}^1 \bar{M} \sec\phi dx}{\int_{-1}^1 x^2 \sec\phi dx} \quad (5.47)$$

拱的挠度表达式由求解式(5.43)得出为

$$w = B + Ax + x \int_{-1}^x f(x) dx - \int_{-1}^x f(x) dx \quad (5.48)$$

式中

$$A = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

$$B = -\frac{1}{2} \int_{-1}^x f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^x x f(x) dx$$

$$f(\theta) = -\frac{\sec\phi}{EI} [\bar{M} + H_x(y - y_0) + M_x] - \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N \tan\phi)$$

对于长度  $B$  较大的拱型折板, 其结构计算时, 仅考虑均匀的水平荷载(这是相



当多的结构设计时采用的荷载形式), 往往略去  $x$  方向的弯矩, 扭矩和横向剪力, 即令  $M_x = M_{xy} = V_x = 0$ 。另外各板的中轴面的横向变形及剪切变形较小, 可以忽略, 即  $\epsilon_y = \gamma_{yz} = 0$ 。这样拱型折板结构可以采用平面结构方法处理, 它与拱结构在平面的内力有一定联系。由于拱型折板与拱类似, 在跨两端有较大的推力, 因此拱型折板结构在端部的设计上要求有较强的抗推能力。

拱型折板结构是以拱轴线为基础设计的。在竖向均匀荷载作用下, 它与拱的区别主要在于各折板棱边的突变弯矩, 随着折板的增加, 这一突变弯矩变小, 它的极限形式就是外接拱轴线。因此我们可以采用连续化方法计算拱型折板结构。这一方法的主要思路是以竖向荷载作用下的拱结构为受力模型, 加上突变弯矩作用于拱的分析, 从而组合成竖向荷载作用下的拱型折板受力分析。自然, 这一方法随折板增加, 误差减小。

现以图 5.10 所示以外接曲线为半圆弧形拱型折板为例, 进行连续化方法计算。

按工程实际通常做法, 取边界为两向支承的两铰拱型折板, 折板外接圆半径为  $R$ 。实际上也可采用非圆的外接曲线, 例如抛物线形拱型折板结构。设每折板宽为  $l$ ,  $\theta$  为从底边量起的圆弧任一点的圆心角, 在非圆曲线上, 用曲线的切线与水平线夹角  $\phi$  表达。

按结构计算的线弹性理论, 圆拱轴在竖向水平荷载作用下是一次超静定结构。设支座水平推力  $x_1$ , 为多系未知力, 两铰拱的力法方程为

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} = 0$$

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_0^{\pi} \frac{My}{EI} dS}{\int_0^{\pi} \frac{y^2 dS}{EI} + \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \phi dS}{EA}} \quad (5.49)$$

式中,  $I$ 、 $A$  为拱轴线的惯性矩与截面积, 如果计算拱型折板, 则采用单位长的拱板计算  $I$  和  $A$ 。

对于圆拱轴线, 有

$$\left. \begin{aligned} dS &= R d\theta \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \phi \\ \bar{M} &= \frac{1}{4} q R^2 (1 - \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

式(5.50)的解表示仅有竖向均匀荷载  $q$  作用时,

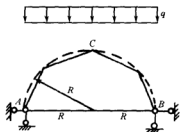


图 5.10 四折板圆形拱型折板

$$x_1 = \frac{8qR^3A}{3\pi(2R^2A + I)} \quad (5.51)$$

拱型折板结构在折板相接处有突变弯矩,用拱轴计算的法模型如图 5.11 所示。按结构对称分析,折板交界处有突变弯矩,分别记为  $M_1$ 、 $M_2$  等,对应的圆心角分别表示为  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  等。

由竖向均匀荷载  $q$  及式(5.51)获得拱轴的内力为

$$\left. \begin{aligned} N &= qR\cos^2\theta + \frac{8qR^3A}{3\pi(2R^2A + I)}\sin\theta \\ V &= qR\cos\theta\sin\theta - \frac{8qR^3A}{3\pi(2R^2A + I)}\cos\theta \\ M &= \frac{1}{4}qR^2(1 - \cos 2\theta) - \frac{8qR^4A}{3\pi(2R^2A + I)}\cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

现在计算图 5.11 所示结构的内力,这时的

多余未知力分别为  $x'_1$ 、 $x'_2$  等:

$$x'_1 = \frac{M_1}{R\sin 45^\circ} \quad x'_2 = \frac{M_2 - M_1}{R\sin 45^\circ}$$

由这些弯矩和多余未知力给出的拱轴内力为

$$\left. \begin{aligned} N &= x'_1\sin\theta \\ V &= x'_1\cos\theta \quad (\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i) \\ M &= x'_iR\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

将式(5.52)与式(5.53)相加,即是拱轴竖向均匀荷载及有折板处弯矩作用下的总内力。

依次可以推出多跨折板的拱轴内力。如取折板数在半跨为  $n$ ,其在均匀竖向荷载及折板弯矩作用下的内力为

$$N = qR\cos^2\theta + \frac{8qR^3A}{3\pi(2R^2A + I)}\sin\theta + x'_1\sin\theta \quad (5.54)$$

$$V = qR\cos\theta\sin\theta - \frac{8qR^3A}{3\pi(2R^2A + I)}\cos\theta + x'_1\cos\theta \quad (\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i) \quad (5.55)$$

$$M = \frac{1}{4}qR^2(1 - \cos 2\theta) - \frac{8qR^4A}{3\pi(2R^2A + I)}\cos\theta + x'_iR\sin\theta \quad (5.56)$$

式中

$$x'_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{R(\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1})} \quad (5.57)$$

对于跨数较少的拱型折板结构,我们可以根据其板长及真实的荷载情况,利用刚架位移法及有限单元板力法求解,这将在后面的各节中分析。对于多跨的拱型折板,利用其外接曲线拱的连续化方法是比较简单可行的。由式(5.54)~(5.56)中可

以看出,跨度越多,则  $M_i$  与  $M_{i-1}$  越接近,它比  $R\sin\theta_i$  与  $R\sin\theta_{i-1}$  接近得更快。上面内力计算式中的附加项与前面主项相比很小,可以略去。拱型折板趋近于拱轴线,内力也趋近于拱内力。

由于利用拱轴线理论计算拱型折板内力有比较明确的解析表达,所以我们称这种分析方法为拱型折板结构的连续化计算方法。此外一般拱型折板结构的挠度分析也是颇为繁琐的,但用这种连续化方法则会给出统一的挠度解析式。

用  $w$  表示拱型折板的挠度,借用拱轴理论,有挠度方程

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\sec\phi}{EI}(x_1y + M) - \frac{d}{dx}\left(\frac{N}{EA}\tan\phi\right) \quad (5.58)$$

对其积分可得

$$w = B + AR\cos\theta + R\cos\theta \int_0^\theta f(\theta)d\theta - \int_0^\theta f(\theta)d\theta \quad (5.59)$$

式中

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{1}{EI\sin\theta}(x_1y + M) + \frac{1}{EAR\sin\theta} \frac{d}{d\theta}(Nctg\theta) \\ &= -\frac{1}{EI\sin\theta} \left[ \frac{1}{4}qR^2(1 - \cos 2\theta) + \frac{8qR^4A}{3\pi(2R^2A + I)}(\sin\theta - \cos\theta) \right] \\ &\quad + \frac{1}{EAR\sin\theta} \frac{d}{d\theta}(Nctg\theta) \end{aligned} \quad (5.60)$$

其边界为

$$w(0) : w(\pi) = 0 \quad (5.61)$$

$$A = \frac{\pi(1 - \cos 2\theta)}{2EI\sin\theta} \quad B = \frac{\pi R\sin\theta}{4EI(1 - \cos^2 2\theta)}$$

式中,  $M$  为用式(5.56)分段计算的  $M$  值;式(5.57)中的  $M_i$  在均匀竖向荷载  $q_0$  作用下,可以表示为  $M_i = \frac{1}{24}q_0 l^2 [\cos\phi_i + \cos\phi_{i-1}]$ ;  $\phi_i, \phi_{i-1}$  分别为第  $i$  折缝处左、右两边折板与水平线的夹角。

如果拱轴线是抛物线的,可仿此方法类似地求出拱型折板的内力和位移。

对于抛物线拱,其拱轴为  $y=f(x)$ 。两铰拱的多余未知力  $x_1$  取式(5.49)。由这  $x_1$  给出的内力为

$$N = x_1\cos\phi \quad V = -x_1\sin\phi \quad M = \bar{M} - x_1y$$

类似地,拱型折板的内力表示为

$$\begin{aligned} N &= x_1\cos\phi + x'_i\cos\phi \\ V &= -x_1\sin\phi - x'_i\sin\phi \quad \phi_i \leq \phi \leq \phi_{i-1} \\ M &= \bar{M} - x_1y + x'_iR\cos\phi \end{aligned}$$

式中,  $\phi_i, \phi_{i-1}$  分别为从边缘量起的折板在第  $i$  棱边两侧与水平线之夹角。

其挠度公式为

$$w = B + Ax + x \int_{-1}^x f(x) dx - \int_{-1}^x f(x) dx$$

$$A = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

$$B = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^x x f(x) dx$$

$$f(x) = -\frac{\sec \phi}{EI} [M_x] - \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N \tan \phi)$$

式中的坐标选择拱中点为坐标原点,  $y$  以下向正。

## 5.5 拱型折板结构的刚架解法

如果拱型折板在拱方向有较强的边界约束,而在每块折板的两端是自由的,这样的拱型折板在均匀荷载作用下,可以简化成刚架结构进行内力分析,通常可采用位移法。

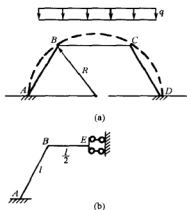


图 5.12 三折板拱型折板

图 5.12 表示均匀荷载  $q$  作用下的三折板拱型折板结构。拱型折板外接圆半径为  $R$ , 这里称之为外圆拱型折板。荷载  $q$  则包括自重恒载和活载。

此拱型折板的内力分析可以采用图 5.12 (b) 所示的刚架体系, 由于假设三折板为等跨度, 所以图 5.12 (b) 中选取对称结构分析,  $BE$  为  $\frac{l}{2}$ 。

由于刚架仅有一个节点角位移, 设为  $\phi_B$ , 另外  $E$  节点有线位移  $\Delta$ , 可以利用位移法求解。

各杆的等截面惯性矩均为  $I$ , 弹性模量为  $E$ , 各杆的相对线刚度分别是

$$i_{BA} = \frac{EI}{R} = 1 \quad i_{BC} = \frac{2EI}{R} = 2 \quad (5.62)$$

$AB$  段均匀荷载的法向分量  $q' = \frac{1}{2}q$ 。各杆端固端弯矩为

$$M_{AB}^0 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{12} q R^2 = -\frac{1}{24} q R^2$$

$$M_{BA}^0 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} q R^2 = \frac{1}{24} q R^2$$

$$M_{BE}^0 = -\frac{1}{3}q\left(\frac{R}{2}\right)^2 = -\frac{1}{12}qR^2$$

$$M_{EB}^0 = -\frac{1}{6}q\left(\frac{R}{2}\right)^2 = -\frac{1}{24}qR^2$$

各杆的杆端弯矩在略去  $B$  端位移时有

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2i(2\phi_A + \phi_B) - \frac{1}{24}qR^2 \\ M_{BA} &= 2i(2\phi_B + \phi_A) + \frac{1}{24}qR^2 \\ M_{BE} &= 2i(2\phi_B + \phi_C) - 6i\frac{2\Delta}{R} - \frac{1}{12}qR^2 \\ M_{EB} &= 2i(\phi_B + 2\phi_C) - 6i\frac{2\Delta}{R} - \frac{1}{24}qR^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

式中,  $\phi_A = \phi_E = 0$ 。

建立位移法方程。由结点  $B$  的力矩平衡关系, 有

$$\begin{aligned} M_{BA} + M_{BE} &= 0 \\ 8i\phi_B - i\frac{12\Delta}{R} - \frac{1}{24}qR^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

由于结构仅承受竖向均匀荷载  $q$ ,  $E$  点处水平支反力为零。再由  $A$  点处的力矩平衡关系, 有

$$M_{AB} + M_{EB} + \frac{1}{2}qR^2 = 0 \quad (5.65)$$

即有

$$4i\phi_B - i\frac{12\Delta}{R} + \frac{5}{12}qR^2 = 0$$

联立求解以上两个方程组, 求得转角  $\phi_B$  及  $E$  处竖向位移  $\Delta$  分别为

$$\phi_B = \frac{11qR^3}{96EI} \quad \Delta = \frac{7qR^4}{96EI} \quad (5.66)$$

可以根据  $\phi_B$  及  $\Delta$  求得结点的弯矩。如结点  $B$  处的弯矩为

$$M_{BA} = 4i\frac{11qR^3}{96EI} + \frac{1}{24}qR^2 = \frac{1}{2}qR^2 \quad (5.67)$$

利用位移法明确并直接计算出跨中  $E$  点处的竖向位移  $\Delta$ , 这在折板结构计算中是非常有用的。它可以从结构的变形方面提供设计参考数据。由于三折板采用的板宽与外接圆半径相等, 故以上各式中用  $R$  表示。对非接圆拱型折板, 只要给出各板宽以及折板夹角, 均可用本节公式求出各结点弯矩及  $E$  点的竖向位移。结点弯矩求出来之后, 结构变为静定结构, 可以方便地求出各板的弯矩及剪力与轴力, 继而进行各板的结构设计。

图 5.13 给出四折板组成的拱型折板结构, 每板宽度为  $l$ 。为便于进行内力分析

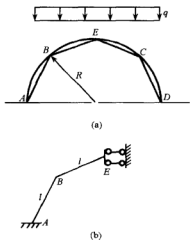


图 5.13 四折板拱型折板

与对比,这里仍采用外接圆半径为  $R$  的拱型折板结构。这里进行的内力分析对非外接圆类的拱型折板也是适用的。

图 5.13(b) 中所示刚架为力学分析模型,有结点  $B$  的转角  $\phi_B$ , 以及  $E$  处的竖向位移  $\Delta$ 。

由于各板  $EI$  相同,故各杆的相对线刚度  $i = \frac{EI}{l}$  相同,按几何计算,有

$$\left. \begin{aligned} l &\approx 0.766R \\ AB \text{ 跨: } q' &\approx 0.383q \quad BE \text{ 跨: } q' = 0.924q \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

结构中各杆端弯矩为

$$M_{AB} = 2i\phi_B - \frac{1}{12}q'l^2 = 2i\phi_B - 0.032ql^2$$

$$M_{BA} = 4i\phi_B + 0.032ql^2$$

$$M_{BE} = 4i\phi_B - 6i\frac{\Delta}{l} - \frac{1}{3}q'l^2$$

$$= 4i\phi_B - 6i\frac{\Delta}{l} - 0.308ql^2$$

$$M_{EB} = 2i\phi_B - 6i\frac{\Delta}{l} - \frac{1}{6}q'l^2$$

$$= 2i\phi_B - 6i\frac{\Delta}{l} - 0.154ql^2$$

建立位移法方程,即类同于三折板,有

$$M_{BA} + M_{BE} = 0$$

$$8i\phi_B - 6i\frac{\Delta}{l} - 0.276ql^2 = 0 \quad (5.69)$$

$$M_{AB} + M_{EB} + \frac{1}{2}qR^2 = 0$$

$$4i\phi_B - 6i\frac{\Delta}{l} + 0.107ql^2 = 0 \quad (5.70)$$

由此方程组分别解出  $\phi_B$  及  $\Delta$  为

$$\phi_B = 0.095 \frac{ql^3}{EI} \quad \Delta = 0.08 \frac{ql^4}{EI} \quad (5.71)$$

相应的  $B$  处弯矩为

$$M_{BA} = 0.412ql^2 \quad (5.72)$$

类同于三折板与四折板的计算,这里给出五折板拱型折板结构的内力和位移计算式。五折板结构如图 5.14 所示。

按结构的外接圆半径为  $R$  计算, 板宽  $l \approx 0.618R$ 。折算法向荷载为

$$BC \text{ 跨: } q' \approx 0.951q$$

$$AB \text{ 跨: } q' \approx 0.588q \quad (5.73)$$

用位移法计算该结构。如图 5.14(b), 有两个角位移  $\phi_B$  和  $\phi_C$ , 有一个线位移即  $E$  点处的  $\Delta$ 。各板  $EI$  相同, 所以相对线刚度  $i_{AB} = i_{BC} = \frac{EI}{l}$ ,  $i_{CE} = \frac{2EI}{l}$ 。

各杆的杆端弯矩为

$$M_{AB} = 2i\phi_B - \frac{1}{12}q'l^2 = 2i\phi_B - 0.049ql^2$$

$$M_{BA} = 4i\phi_B + 0.049ql^2$$

$$M_{BC} = 4i\phi_B + 2i\phi_C - \frac{1}{12}q'l^2$$

$$= 4i\phi_B + 2i\phi_C - 0.079ql^2$$

$$M_{CB} = 4i\phi_C + 2i\phi_B + 0.079ql^2$$

$$M_{CE} = 4i\phi_C - 6i\frac{\Delta}{l} - \frac{1}{12}ql^2$$

$$M_{EC} = 2i\phi_C - 6i\frac{\Delta}{l} - \frac{1}{24}ql^2$$

建立位移法方程, 类同于三折板情形, 有

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$8i\phi_B + 2i\phi_C - 0.03ql^2 = 0 \quad (5.74)$$

$$M_{CB} + M_{CE} = 0$$

$$2i\phi_B + 8i\phi_C - 6i\frac{\Delta}{l} - 0.004ql^2 = 0 \quad (5.75)$$

$$M_{AB} + M_{CE} + \frac{1}{2}qR^2 = 0$$

$$2i\phi_B + 2i\phi_C - 6i\frac{\Delta}{l} + 0.11ql^2 = 0 \quad (5.76)$$

解此位移方程组, 可以求出各位移如下:

$$\phi_B = -0.001 \frac{ql^3}{EI} \quad \phi_C = 0.019 \frac{ql^3}{EI} \quad \Delta = 0.024 \frac{ql^4}{EI}$$

并可进而求出角部弯矩为

$$M_{BA} = 0.045ql^2 \quad M_{CB} = 0.154ql^2$$

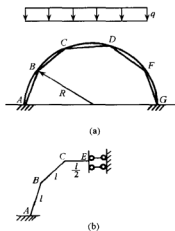


图 5.14 五折板拱型折板

自然,不难继续求出六、七、八等折板组成的拱型折板结构的结点弯矩与跨中挠度。

对更多跨的拱型折板结构,各板宽度相同,在竖向均匀荷载作用下的结构分析都可按以上方法进行。其中折板结构可以是外接圆形的,也可以是非圆形的。

例如  $n$  跨的拱型折板,各折板从两端向中心对称布置,那么可以选取其一半为基本结构。如果折板较长,可以选取单位长度为计算单元形成刚架形计算模型。用位移法求解,那么  $n$  为偶数时,则有  $\frac{n}{2}-1$  的角位移和跨中的竖向位移;当  $n$  为奇数时,则有  $\frac{n-1}{2}$  的角位移和跨中的竖向位移。

角位移基本方程一般为

$$8i\phi_n + 2i\phi_{n-1} - \frac{1}{12}q'_n l^2 + \frac{1}{12}q'_{n-1} l^2 = 0 \quad (5.77)$$

线位移基本方程为

$$2i\phi_1 + 2i\phi_m - 6i\frac{\Delta}{l} + \frac{1}{2}qR^2 = 0 \quad (5.78)$$

式中,  $\phi_m$  表示中点处附近的角位移;  $R$  表示拱型折板结构水平半跨长;  $q'_{n-1}$ 、 $q'_n$  等表示各折板折算法向荷载;  $l$  表示各折板宽。

解位移法方程可以获得各角位移与中点的竖向位移。由这些位移已知量可以分别计算出各角点的弯矩,结构成静定结构之后,可以分别求出各折板的弯矩、轴力和剪力,以便于对各折板进行配筋等结构设计。

由三、四、五折板的计算可知,随着折板数的增加,各角部的角位移逐渐减少,也就是说相应的弯矩也在逐渐减少。对于同一折板结构,靠近支座处的弯矩比上部弯矩要小,这是因为随着折板数增多,靠近支座处的法向荷载小,折板主要承受轴力,因此弯矩要比上部小。折板的跨中挠度在单数折数时要大于拱的跨中挠度,在双数折数时往往小于拱的挠度。

## 5.6 变厚度拱型折板结构<sup>1)</sup>

本节研究另外一种拱型折板结构,该结构的每块折板长宽之比在 2:1 之间,即每块折板不像 5.5 节那样是很长的,可以取单位宽,简化成刚架。另外还假设折板在跨度两边为自由或其他支承,而在径向两端则为铰支承。

本节采用单元板力法对该结构进行内力分析。为更一般地研究拱型折板结构,这里设每块折板在跨度方向是线性变化的,而在径向则没有变化。在推导出变厚度

1) 贾乃文等. 拱型变厚度折板结构内力分析. 空间结构, 2000 年 4 期



拱型折板结构内力计算式后,很容易简化出常厚度拱板结构的内力计算式。

由于每块折板在长宽方向相差不大,而每块折板支承条件是两端铰支、另两端弹性支承,所以在外荷载作用下,板内有两个方向弯矩,计算时都要加以考虑。

图 5.15 表示变厚度拱型折板结构,它有半径为  $R$  的外接圆。按图中坐标所示,每折板在  $x$  方向是等厚度的,但在  $y$  方向是线性变厚度的。设  $y=0$  处的板厚为  $h_0$ ,折板厚  $h=h_0\left(1+\frac{\lambda y}{b}\right)$  变化,每块板宽为  $b$ , $\lambda$  为板厚变化系数。由于相邻板的连接作用,故整个结构在  $x$  方向两边按铰支考虑。

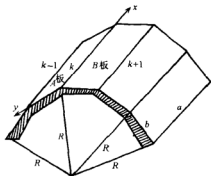


图 5.15 拱型变厚度折板

由于每块折板是双向板,这里不能采用 5.5 节中折板结构计算的假定,即各板在  $x$  方向无弯矩,而应计入  $x$  方向的弯矩,采用每块折板为两对边铰支、另两对边 ( $y$  方向)为弹性支承的双向板考虑。

这种拱型折板结构的分析方法是弹性支承表达  $y$  方向板边支承,主要计算板边的未知弯矩。每折板在外荷载和两对边弯矩作用下,依据上述支承条件求出板中内力。

本节采用有限单元板力法求解每块折板边缘未知力矩。有限单元板力法是将折板结构的每棱边的未知弯矩作为基本未知量,分别用  $M_1, \dots, M_k, \dots, M_i$  表达。如果拱两端  $a$  边为固支,  $M_1, M_i$  表达两端处弯矩;如果这两端为铰支,  $M_1, M_i$  则从端部第二棱边算起。利用各棱边变形协调性建立力法方程。方程的系数即是两对边铰支、另两对边弹性支承条件下,在沿  $a$  长度  $y$  方向单位力矩引起的板边转角,分别用  $\delta_{k,j}$  表示;以及由外荷载作用引起的棱边转角,分别用  $\theta_{k,j}$  表示。求解力法方程必须先分析与计算这些  $\delta_{k,j}$  与  $\theta_{k,j}$  等系数,解力法方程之后获得各棱边的弯矩,各折板成为静定结构。再由外荷载与两对边  $y$  方向的弯矩作用,求解出各板的内力。

图 5.15 中的  $k$  棱边是  $A$  折板与  $B$  折板相交棱边,其未知弯矩为  $M_k$ ,相邻的两棱边弯矩分别为  $M_{k-1}, M_{k+1}$ 。导致  $k$  棱边有转角的分别为  $A, B$  折板的未知弯矩和外荷载,可建立力法方程为

$$\delta_{k,k-1}^A M_{k-1} + \delta_{k,k}^A M_k + \delta_{k,k}^B M_k + \delta_{k,k+1}^B M_{k+1} + \theta_{k,k}^A + \theta_{k,k}^B = 0 \quad (5.79)$$

类似地,可逐个对每棱边建立与式(5.79)类似的相应的力法方程。由于未知弯矩数即棱边数与方程数相等,联立求解这些关于未知弯矩的非齐次方程组,在系数  $\delta_{k,j}$  与  $\theta_{k,j}$  确定情况下,未知弯矩能够解出。

式(5.79)中方程的各系数是按两端铰支、另两端弹性支承的变厚度矩形板计

算而得的。下面分析各系数的确定方法。

各折板的厚度在  $y$  方向是变化的,即  $h=h_0\left(1+\frac{\lambda y}{b}\right)$ ,式中,  $h_0$  为棱边处的板厚。由于  $\lambda$  可取正负号,因此板厚可随  $y$  渐增或渐减。每板的抗弯刚度为  $y$  的非线性函数,即

$$D_y = D_0 \left(1 + \frac{\lambda y}{b}\right)^3 \quad (5.80)$$

式中,  $D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu^2)}$ 。

每块折板在它的抗弯刚度为  $y$  函数时的挠度微分方程为

$$D_y \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D_y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \nabla^2 D_y \nabla^2 w - (1-\mu) \left( \frac{\partial^2 D_y}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - q = 0 \quad (5.81)$$

式中,  $\nabla^2$ 、 $\nabla^4$  分别为调合算子和重调合算子。由于本问题的弹性支承是边界条件。它不同于弹性地基板,故式(5.81)中  $q$  仅表示法向外荷载。

这一方程可以采用关于  $\lambda$  的多项式解函数求解,即设挠度  $w$  为

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w_n \quad (5.82)$$

式中,  $w_n$  是  $x, y$  的函数。将这一挠度表达式(5.82)代入方程(5.81)中,就会得出关于  $\lambda$  的代数方程。由  $\lambda$  各幂次的系数为零,可以得出如下一系列递推公式:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_0 &= \frac{q}{D_0} \\ \nabla^4 w_1 &= -3 \left[ \frac{2}{b} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_0 + \frac{y}{b} \nabla^4 w_0 \right] \\ \nabla^4 w_2 &= -3 \left[ \frac{2}{b} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_1 + \frac{y}{b} \nabla^4 w_1 \right] \\ &\quad - 3 \left\{ \frac{2}{b^2} \left[ \nabla^2 w_0 - (1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 \right] + \frac{2y}{b} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_0 + \frac{y}{b} \nabla^4 w_0 \right\} \\ &\dots \end{aligned}$$

依次求解这一系列递推方程,可以获得  $w_0, w_1, w_2$  等,从而组合成挠度表示  $w$ 。在一般工程计算中,挠度仅取前两项即可满足设计要求。即取  $w = w_0 + \lambda w_1$ 。

在将折板结构的棱边约束去除,代之以未知弯矩和弹性支承后,每折板的计算分成两个部分。其一是每板的法向外荷载,其二是沿板面的切向荷载。法向荷载  $q$  作用下的挠度方程即是式(5.81)以及解函数(5.82)。

由于每块折板为矩形板,在法向荷载  $q$  作用下,在  $x$  方向为两端铰支,在  $y$  方向是变厚度,且在两端为弹性支承。可取板的挠度为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (5.83)$$

式中,  $Y_m$  是  $y$  的函数;  $a$  为  $x$  方向的板长。如取第一项, 可以表示为

$$w_0 = Y_1 \sin \frac{\pi x}{a}$$

将其代入挠度递推公式中, 即有

$$\nabla^4 w_0 = \frac{q}{D_0}$$

这一方程的解可分为齐次方程的通解和由  $q$  作用下的非齐次方程的一个特解。齐次方程的通解  $Y_1$  为

$$Y_1 = A_1 \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + C_1 \frac{\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + E_1 \frac{\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a}$$

式中,  $A_1, B_1, C_1, E_1$  为积分常数, 它们将由  $y$  方向两边的边界条件确定。

为确定力法方程的系数  $\delta_{k,j}$ , 现将  $B$  折板  $y$  方向宽为  $b$  的两边的弹性支座的弹性系数分别用  $f_k^B, f_{k+1}^B$  表示, 并设  $y=0$  处有  $M_k = 1 \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$  弯矩作用, 则有边界条件

$$\frac{1}{b} \sin \frac{\pi x}{a} = f_k^B w_0 \quad y = 0$$

$$\frac{1}{b} \sin \frac{\pi x}{a} = f_{k+1}^B w_0 \quad y = b$$

$$\left( -D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = \sin \frac{\pi x}{a} \quad y = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad y = b$$

其中,  $D_1 = (1-\lambda)^3 D_0$ 。

由以上方程可以解出

$$A_1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi b}{a}} \left[ \frac{1}{f_{k+1}^B b} \left( \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} - \frac{\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} \right) - B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} - C_1 \frac{\pi b}{2a} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi b}{a} \right]$$

$$B_1 = \frac{1}{f_k^B b}$$

$$C_1 = -\frac{a^2}{2\pi D_1} - \frac{B_1}{2}$$

$$E_1 = \frac{1}{\frac{\pi b}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a}} \left( \frac{1}{f_{k+1}^B b} - B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} - C_1 \frac{\pi b}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} - A_1 \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} \right)$$

由此求得在仅有  $w_0$  表达时的转角为

$$\delta_{k,k}^B = \left. \frac{\partial w_0}{\partial y} \right|_{y=0} = \left( A_1 \frac{\pi}{a} + E_1 \frac{\pi}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (5.84)$$

$$\delta_{k,k+1}^B = \left. \frac{\partial w_0}{\partial y} \right|_{y=b} = \left[ \left( A_1 \frac{\pi}{a} + C_1 \frac{\pi^2 b}{a^2} + E_1 \frac{\pi}{a} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} \right]$$

$$+ \left( B_1 \frac{\pi}{a} + C_1 \frac{\pi}{a} + E_1 \frac{\pi^2 b}{a^2} \right) \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} \left] \sin \frac{\pi x}{a} \quad (5.85)$$

再进一步由  $w_0$  代入  $w_1$  式中求出  $w_1$ , 将  $w_0 + \lambda w_1$  分别对  $y$  求导数, 得出更为精确的  $\delta_{k,k}^B, \delta_{k,k+1}^B$ 。对折板进行类似的分析, 可以得出力法方程的系数  $\delta_{k,k-1}^A, \delta_{k,k}^A$ 。

方程

$$\nabla^4 w_0 = \frac{q}{D}$$

的特解, 即是两对边铰支、另两对边弹性支承的矩形板在法向外荷载  $q$  作用下的挠度  $w_0'$ , 由 5.1 节公式给出

$$w_0' = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (5.86)$$

式中,  $A_{11}$  为常数, 它由  $q$  的表达式确定, 在  $q = q_0$  常数时, 有

$$A_{11} = \frac{16q_0}{\pi^5 D_0 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

由式 (5.86) 可以求出力法方程中系数  $\theta_{k,k}^B$  为

$$\theta_{k,k}^B = \left. \frac{\partial w_0'}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{16q_0}{\pi^5 b D_0 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (5.87)$$

类似于  $w_0$  与  $w_1$  的关系, 将这一  $w_0'$  代入方程  $w_1'$  式, 进一步求出  $w_1'$ 。由  $w_0' + \lambda w_1'$  可以进一步求出更为精确的  $\theta_{k,k}^B$  值。类似地对  $A$  折板进行分析, 可以求出  $\theta_{k,k}^A$  值等。这是其中的一部分。

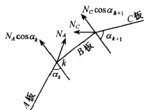


图 5.16 切向作用力图

由于拱型折板结构各折板不在同一平面上, 结构承受的竖向荷载对每折板除法向压力  $q$  之外, 尚有切向作用力。由于每块折板在  $y$  方向两端的切向作用力的法向投影分量大小不同, 导致折板有刚性转角。以  $B$  板为例 (图 5.16),  $A$  板给出的推力在  $B$  板的法向投影为  $N_A \cos \alpha_k$ , 而由  $C$  板给出的推力在  $B$  板的法向投影为  $N_C \cos \alpha_{k+1}$ 。一般接近边界的  $N$  大, 故有  $B$  板刚性转角  $\theta_{k,k+1}^B$  的另一部分值:

$$\delta_{k,k+1}^B = \frac{N_A \cos \alpha_k}{f_k^B b} - \frac{N_C \cos \alpha_{k+1}}{f_{k+1}^B b} \quad (5.88)$$

将这一结果叠加到由  $q$  引起的  $\delta_{k,k}^B$ , 再代入力法方程中, 类似地, 也要计入板  $A$  的刚性转角, 叠加到原有的  $\delta_{k,k}^A$  之中, 形成最后代入力法方程中的各  $\delta$  值。

各折板的系数  $\delta_{k,i}$  及  $\theta_{k,i}$  分析和确定之后, 解力法方程, 即会求出各棱边的未知力矩  $M_1, \dots, M_k, \dots, M_i$ 。各折板成为两对边简支、 $y$  方向两对边弹性支承, 并有相应弯矩以及外荷载作用下的矩形变厚度板, 这属于静定结构, 内力不难由板壳理论公式求出。

现在对折板结构的弹性系数进行分析。以图 5.17 中的  $B$  板为例,如果  $k$  棱边靠近边界,那么  $B$  折板原在圆弧上的两点  $aa$ ,在垂直板面荷载以及相邻折板不同的支反力  $N_A$ 、 $N_C$  作用下,变成  $a'a'$  边,即板中心下移  $y$  距离,支反力  $N_A$ 、 $N_C$  对  $B$  板的法向分力又使板转动角度  $\beta$ 。折板的弹性系数即是  $y$  为单位位移时所需  $P$  值的大小。

在结构受有竖向荷载时, $N_A$  一般大于  $N_C$ ,则有  $\beta$  值为

$$\beta = \frac{(N_A \cos \alpha_k - N_C \cos \alpha_{k+1})}{G_B J_B} 2R \sin \gamma \quad (5.89)$$

式中, $G_B$  为  $B$  折板的剪切模量; $J_B$  为  $B$  折板的极惯性矩。

按图(5.17)的分析可知,

$$\delta = \frac{N_A \sin \alpha_k R \sin \gamma}{E_B A_B} + (R \sin \gamma) \beta^2 \quad (5.90)$$

式中, $E_B$  为  $B$  折板的弹性模量; $A_B$  为  $B$  折板在  $y=0$  处的截面积,在小变形条件下,略去式(5.80)中的高阶小量,则有

$$\delta = \frac{N_A \sin \alpha_k R \sin \gamma}{E_B A_B} \quad (5.91)$$

再按平衡关系

$$P = 2N_A \cos \alpha_k$$

$$y = \delta \cot \gamma$$

$$P = f_k^B y$$

得出

$$f_k^B = \frac{2E_B A_B \cos \alpha_k}{R \sin \alpha_k \cos \gamma} \quad (5.92)$$

类似地,可以分析出  $f_{k+1}^B$  以及其他各折板的弹性系数。

以上分析和计算出的各折板棱边的棱边弯矩,主要反映在中点处的弯矩。然后再按矩形板两端铰支、两端弹性支承下,分别承受板面分布荷载及棱边弯矩作用,计算各板内弯矩及剪力等。关于两端铰支,两端弹性支承的矩形板的计算,可查阅铁木辛柯所著《板壳理论》一书 226 页。

常厚度折板结构是常用的一种更为普通的折板结构。如果符合本节中提出的结构尺寸及边界约束条件,只要令  $\lambda=0$ ,即各板厚均为  $h=h_0$ ,就可以利用本节中各公式计算出棱边弯矩。这时,其他公式没变化,仅是

$$D_y = D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1 - \mu^2)}$$

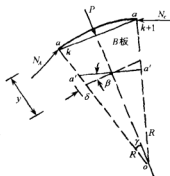


图 5.17 折板弹性系数分析

挠度微分方程为

$$\begin{aligned} D_0 \nabla^2 \nabla^2 w &= q \\ D_1 &= D_0 \quad w = w_0 \quad \dots \end{aligned} \quad (5.93)$$

解力法方程的过程与变厚度时完全一样。

**算例 5.3** 现以图 5.18 所示四折板等厚度折板结构为例说明本节公式的应用。

该结构跨度两端自由, 径向两端铰支。折板外接圆半径为  $R \approx 2.61\text{m}$ , 各折板均为  $2\text{m} \times 4\text{m}$ , 板厚  $8\text{cm}$ , 弹性模量取混凝土值  $E = 2.6 \times 10^4 \text{N/mm}^2$ ,  $\mu = 0$ , 结构承受均匀分布竖向荷载  $q_0 = 1\text{kN/m}^2$ 。

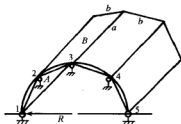


图 5.18 四折板拱型折板

**解** 由给定各量求出

$$\sin \alpha_k = 0.923 \quad \cos \gamma = 0.923 \quad \cos \alpha_k = 0.383 \quad R = 2.61\text{m}$$

$$f_2^B = f_4^B = \frac{2EA_B \sin \alpha_k}{R(\cos \gamma)^2} = 2.217 \times 10^9 \text{N/m}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} = 1.11 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$$

对应的方程中相关系数为

$$B_1 = \frac{1}{f_k^B b} = 3.308 \times 10^{-10}$$

$$C_1 = \frac{a^2}{2\pi D} - \frac{1}{2} B_1 = -2.2945 \times 10^{-6}$$

$$A_1 = \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{\pi b}{a}} \left[ \frac{1}{f_{k+1}^B b} \left( \text{sh} \frac{\pi b}{a} - \frac{\pi b}{a} \text{ch} \frac{\pi b}{a} \right) - B_1 \text{ch} \frac{\pi b}{a} \text{sh} \frac{\pi b}{a} - C_1 \frac{\pi b}{2a} \text{sh}^2 \frac{\pi b}{a} \right]$$

$$= 2.3124 \times 10^{-6}$$

$$E_1 = \frac{1}{\frac{\pi b}{a} \text{ch} \frac{\pi b}{a}} \left( \frac{1}{f_{k+1}^B b} - B_1 \text{ch} \frac{\pi b}{a} - C_1 \frac{\pi b}{a} \text{ch} \frac{\pi b}{a} - A_1 \text{sh} \frac{\pi b}{a} \right) = 0.6321 \times 10^{-6}$$

$$\delta_{22}^B = \left( A_1 \frac{\pi}{a} + E_1 \frac{\pi}{a} \right) = 2.3126 \times 10^{-6} \quad \left( x = \frac{a}{2} \right)$$

$$\delta_{23}^B = \frac{\pi}{a} \left[ \left( A_1 + C_1 \frac{\pi b}{a} + E_1 \right) \text{ch} \frac{\pi b}{a} + \left( B_1 + C_1 + E_1 \frac{\pi b}{a} \right) \text{sh} \frac{\pi b}{a} \right]$$

$$= -3.6517 \times 10^{-6} \quad \left( x = \frac{a}{2} \right)$$

$$\theta_{22}^B = \frac{16q_0 \times 0.923}{\pi^5 b D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = 227.08 \times 10^{-6}$$

$$\theta_{22}^A = \frac{16q_0 \times 0.383}{\pi^5 b D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} = 94.22 \times 10^{-6}$$

由于各折板尺寸、材料均相同,故有

$$\delta_{22} = \delta_{22}^A + \delta_{22}^B = 4.6253 \times 10^{-6}$$

$$\delta_{23} = -3.6517 \times 10^{-6} \quad \delta_{33} = \delta_{22} = 4.6253 \times 10^{-6}$$

$$\theta_{22} = 314.9638 \times 10^{-6} \quad \theta_{33} = 445.1938 \times 10^{-6}$$

列出力法方程为

$$4.6253M_2 - 3.6517M_3 + 314.9638 = 0$$

$$-3.6517M_2 + 4.6253M_3 + 445.1938 = 0$$

求出

$$M_2 = M_4 = -379.67 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = -395.46 \text{ N} \cdot \text{m}$$

各板中的其他内力可按相关公式求出,本书不再赘述。

## 5.7 拱型折板结构的塑性极限分析

本节是在 5.6 节基础上,进一步求解折板的塑性极限荷载。按单元板力法,可以分别求出拱型折板每棱边的弯矩,每折板成为两对边铰支、另两对边弹性支承的矩形板。每折板在结构竖向均匀荷载以及两对边弯矩作用下的极限分析将比普通矩形板受法向荷载下的极限分析更为复杂。

本节仍然从静力法和机动法出发求出折板的极限荷载的下限与上限。

先用静力法求跨中折板的极限荷载的下限。因为跨中折板受法向荷载以及棱边弯矩最大,该折板最早进入塑性。采用图 5.19 所示的坐标进行计算。

分布荷载  $q$  作用下的板的平衡方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (5.94)$$

设板的厚度为  $h$ ,则有断面上的各弯矩表示:

$$M_x = \frac{1}{4} h^2 \sigma_x \quad M_y = \frac{1}{4} h^2 \sigma_y$$

$$M_{xy} = \frac{1}{4} h^2 \tau_{xy} \quad M_t = \frac{1}{4} h^2 \sigma_t$$

式中,  $\sigma_s$  为材料进入塑性时的应力值。按 Mises 屈服准则,板进入塑性时条件式为

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2 = M_t^2 \quad (5.95)$$

利用静力法求下限解的极限荷载时,可采

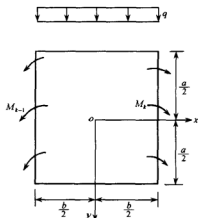


图 5.19 折板静力分析

用半逆解法,即先假设板的一部分内力,再由平衡方程及边界条件求出另外一部分内力。将全部内力代入屈服条件式,可以确定出下限解的极限荷载。

对于四周边为简支的矩形板,我们曾按边界条件给出极限内力表示,现在由于两个  $x$  方向对边分别有  $M_{k-1}$  与  $M_k$  的边界弯矩,所以按半逆解法给出的假设极限弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= c \left( \frac{b^2}{4} - x^2 \right) + \frac{1}{b} (-M_k + M_{k-1})x - \frac{1}{2} (M_k + M_{k-1}) \\ M_y &= c \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

将式(5.96)代入平衡方程(5.94),可以得出

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{q}{2} + 2c$$

为了满足平衡方程,可以取  $M_{xy} = \left( -\frac{q}{2} + 2c \right) xy$ ,那么所有内力都满足平衡方程及边界条件。将这些内力代入 Mises 屈服准则式,则有

$$\begin{aligned} & M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2 \\ &= \left[ c \left( \frac{b^2}{4} - x^2 \right) + \frac{1}{b} (-M_k + M_{k-1})x - \frac{1}{2} (M_k + M_{k-1}) \right]^2 \\ &\quad - \left[ c \left( \frac{b^2}{4} - x^2 \right) + \frac{1}{b} (-M_k + M_{k-1})x - \frac{1}{2} (M_k + M_{k-1}) \right] c \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) \\ &\quad + c^2 \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right)^2 + 3 \left( -\frac{q}{2} + 2c \right)^2 x^2 y^2 \end{aligned} \quad (5.97)$$

现对以上函数寻找极值点。如将以上函数表达为  $g(x, y^2) = g(x, \eta)$ ,那么由于

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 2c^2 > 0$$

说明按图 5.19 坐标的关于  $y$  轴对称性,仅在  $y=0$  和  $y=\pm\frac{a}{2}$  处,函数  $g$  会出现极值。令  $y=0$  寻找关于函数  $g(x, y^2)$  的极值点是有意义的。

按荷载与结构的对称性,取跨中  $y=0$  的弯矩表达式为

$$M_x = c \left( \frac{b^2}{4} - x^2 \right) + \frac{1}{b} (-M_k + M_{k-1})x - \frac{1}{2} (M_k + M_{k-1})$$

由  $\frac{\partial M_x}{\partial x} = 0$ , 求出极点位置为

$$x = \frac{1}{2cb} (-M_k + M_{k-1})$$

函数  $g$  的极点仅能出现在  $y=0, x=\frac{1}{2cb} (-M_k + M_{k-1})$ , 以及板的四角点处,即  $x=\pm\frac{b}{2}, y=\pm\frac{a}{2}$  处。将以上点的坐标代入 Mises 屈服准则式:



1)  $x = \frac{1}{2cb}(-M_k + M_{k-1}), y = 0$  时, 得

$$\left\{ c \left[ \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4c^2b^2}(-M_k + M_{k-1})^2 \right] + \frac{1}{2c^2b^2}(-M_k + M_{k-1})^2 - \frac{1}{2}(M_k + M_{k-1}) \right\}^2 - \frac{a^2c}{4} \left\{ c \left[ \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4c^2b^2}(-M_k + M_{k-1})^2 \right] + \frac{1}{2c^2b^2}(-M_k + M_{k-1})^2 - \frac{1}{2}(M_k + M_{k-1}) \right\} + \frac{a^4c^2}{16} = M_i^2 \quad (5.98)$$

2)  $x = \frac{b}{2}, y = \frac{a}{2}$  时, 得

$$M_k^2 + \frac{3}{16}a^2b^2 \left[ -\frac{q}{2} + 2c \right]^2 = M_i^2 \quad (5.99)$$

3)  $x = -\frac{b}{2}, y = \frac{a}{2}$  时, 得

$$M_{k-1}^2 + \frac{3}{16}a^2b^2 \left[ -\frac{q}{2} + 2c \right]^2 = M_i^2 \quad (5.100)$$

当然, 还可列出 4 个边中点处的屈服准则式。分别由式(5.98)与式(5.99)或者式(5.98)与式(5.100)联立, 在  $M_k, M_{k-1}$  给定时, 计算出  $c$  值以及极限荷载  $q$ ; 或者由式(5.98)与各边中点的 Mises 屈服准则式方程联立, 亦可解出  $q$ 。比较这些  $q$  值, 按静力法获得真实荷载的下限, 取其中最大  $q$  为极限荷载。

下面用机动法求折板的极限荷载上限。

矩形折板的破坏机构如图 5.20 所示。参照周边铰支矩形板在均匀荷载下的破坏机构, 考虑两对边的弯矩  $M_k, M_{k-1}$  的作用, 此时在  $x$  方向的垂直铰线  $EF$  不在板中点, 而设距  $BD$  边为  $x$ 。

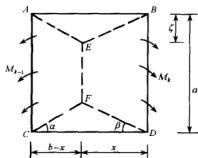


图 5.20 折板破坏机构

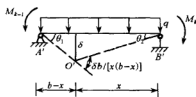


图 5.21 折板转角分析

为求板塑性变形内力功, 设塑性铰线  $EF$  的挠度为  $\delta$ , 板  $AECF$  与板  $BDFE$  的相对转角如图 5.21 所示, 它有

$$\begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 &= \frac{\delta}{A'B'} + \frac{\delta}{O'B'} \\ &\approx \frac{\delta}{b-x} + \frac{\delta}{x} = \frac{\delta b}{x(b-x)}\end{aligned}\quad (5.101)$$

铰线  $EF$  上的内力功为

$$M_s(\theta_1 + \theta_2)EF = \frac{\delta b}{x(b-x)}(a - 2\xi) \quad (5.102)$$

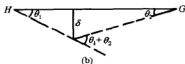
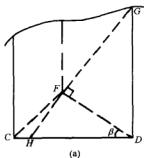


图 5.22 铰线  $FD$  两侧板夹角

再看铰线  $FD$  两侧板的相对转角。如图 5.22 所示,过  $F$  做一垂直于  $FD$  的平面,与板的边界交于  $G, H$ ,则可求出

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\delta}{FH} = \frac{\delta}{FD \operatorname{tg} \beta} \\ \theta_2 &= \frac{\delta}{FG} = \frac{\delta}{FD \operatorname{ctg} \beta} \\ \theta_1 + \theta_2 &= \frac{\delta}{FD} (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta)\end{aligned}$$

在铰线  $FD$  上的内力功为

$$M_s(\theta_1 + \theta_2)FD = M_s \delta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta) \quad (5.103)$$

同理求得  $FC$  铰线内力功为

$$M_s \delta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \quad (5.104)$$

则全部塑性铰线上的内力功  $W_{\text{内}}$  为

$$W_{\text{内}} = M_s \delta \left[ 2\operatorname{tg} \alpha + 2\operatorname{ctg} \alpha + 2\operatorname{tg} \beta + 2\operatorname{ctg} \beta + \frac{b}{x(b-x)}(a - 2\xi) \right]$$

将  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b-x}{\xi}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\xi}{b-x}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\xi}{x}$ ,  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{x}{\xi}$  代入上式中得出

$$W_{\text{内}} = M_s \delta \left[ \frac{2b}{\xi} + \frac{ab}{x(b-x)} \right] \quad (5.105)$$

外力功是由均匀法向荷载  $q$  乘以板的初始平面与破坏后的“屋顶”表面形成的体积,用  $W_{\text{外}}$  表示为

$$W_{\text{外}} = \frac{2}{3} q b \xi \delta + \frac{1}{2} q b \delta (a - 2\xi) \quad (5.106)$$

如果棱边弯矩  $M_{k-1}, M_k$  达不到  $M_s$  (这是主要在工程中出现的情况),外力功尚有由  $M_{k-1}, M_k$  所做的功,它们要加入到式(5.106)中,即  $W_{\text{外}}$  增加

$$M_{k-1} a \frac{\delta}{b-x} + M_k a \frac{\delta}{x} \quad (5.107)$$

如果棱边的弯矩达到  $M_s$ ,那么仅在内力功式(5.105)中增加下面表达:

$$M_s a \left( \frac{\delta}{b-x} + \frac{\delta}{x} \right)$$

由内力功与外力功相等,即  $W_{\text{内}}=W_{\text{外}}$ ,可以获得  $q$  与  $\zeta$  的方程式,式中  $\zeta$  为未知量,按荷载为最小值的条件确定  $\zeta$ ,再将该  $\zeta$  代回到原方程中求出极限荷载的上限解。

在工程结构设计中,结构荷载无论永久荷载还是外部活载都是按竖向荷载均匀分布给出的。在进行拱型折板结构每折板极限分析时,要将这一竖向荷载投影成每块折板的法向荷载  $q$ ,如图 5.19 所示。在求出极限荷载  $q$  之后,再反过来计算结构的竖向荷载。

由于拱型折板结构的特殊性,在进行极限分析时,均略去了轴力的影响。这是因为竖向均匀荷载作用下的拱型折板结构与拱结构类似,在棱边弯矩较大处,即跨中附近,其轴力是相当小的;而在靠近支座附近的折板,虽然轴力较大,但这时折板边的弯矩又很小,不足以造成折板的塑性状态。比如包括自重在内的竖向均匀荷载为  $5\text{kN/m}^2$ ,取折板为 C20 混凝土,其抗压强度为  $9.5\text{N/mm}^2$ ,板厚按  $8\text{cm}$  计算,最大受压折板的压应力估计为  $5R/80(\text{N/mm}^2)$ ,  $R$  为折板结构的横向半跨长,显然它远远小于混凝土抗压强度。但跨中最大弯曲应力大于  $f_y=210\text{N/mm}^2$ ,显然不计轴力不会影响极限分析结果。

在进行折板结构极限分析时,棱边弯矩  $M_k$ 、 $M_{k-1}$  等是作为已知外弯矩加入计算的,由 5.6 节单元板力法求解棱边弯矩可知,在折板几何尺寸和材料确定之后,棱边弯矩与法向分布荷载成比例,我们可以按单位竖向均匀荷载作用下,先行求出各棱边弯矩的数值,在继续进行极限分析时, $M_k$ 、 $M_{k-1}$  就会表达成这一荷载的正比函数,然后可以用本节方法求出极限荷载。

**算例 5.4** 同算例 5.3 一样分析四折板拱型折板结构的极限荷载。每折板长  $a=4\text{m}$ ,宽  $b=2\text{m}$ ,各板均厚为  $8\text{cm}$ ,钢筋混凝土结构  $E=2.6\times 10^6\text{N/cm}^2$ 。

**解** 由算例 5.3 知,跨中折板两边的弯矩分别是

$$M_2 = 0.379q \quad M_3 = 0.395q$$

代入机动法上限公式,其中

$$x = \frac{M_3 b}{M_2 + M_3} = 1.02$$

内力功为

$$W_{\text{内}} = M_2 \delta \left( \frac{4}{\zeta} + 8 \right)$$

外力功为

$$\begin{aligned} W_{\text{外}} &= \frac{2}{3} q b \zeta \delta + \frac{1}{2} q b \delta (a - 2\zeta) + M_{k-1} a \frac{\delta}{b-x} + M_k a \frac{\delta}{x} \\ &= \left[ \frac{4}{3} q \zeta + q(4 - 2\zeta) + 3.09q \right] \delta \end{aligned}$$

全内力功与外力功相等,可得出

$$q = \frac{M_s \left( \frac{4}{\zeta} + 8 \right)}{\frac{4}{3}\zeta + (4 - 2\zeta) + 3.09}$$

式中,  $\zeta$  为一未知量, 由使荷载  $q$  为最小值条件确定, 即  $\frac{dq}{d\zeta} = 0$ , 得

$$\zeta^2 + 0.5\zeta - 0.28 = 0$$

求出  $\zeta = 0.335$ , 将其代入  $q$  表达式求出极限荷载的上限为  $q^+ = 2.8M_s \text{ kN/m}^2$ 。

再用静力法分析, 由式(5.98)得

$$(c + 0.387q)^2 - 4c(c + 0.387q) + 16c^2 = M_s^2$$

再由式(5.99)得

$$c = \frac{q}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_s^2 - 0.15q^2}{12}}$$

从前一式中求出  $c$  与后一式中  $c$  相等, 得

$$0.25q \pm 0.145 \sqrt{M_s^2 - 0.15q^2} = 0.03q \pm 0.277 \sqrt{M_s^2 - 0.15q^2}$$

由此解出  $q$  的最大值为  $q^- = 1.25M_s \text{ kN/m}^2$ 。

我们还可以用其他的破坏机构求极限荷载的上限, 例如考虑棱边弯矩达极限弯矩, 增加内力功, 减少外力功; 还可以用其他的点的坐标进行静力法分析, 例如由式(5.98)与式(5.100)联立, 或者还有  $x = 1.02$  时,  $y = \pm \frac{a}{2}$  处等。但以本例中的极限荷载分别为上限最小值以及下限最大值。故真实极限荷载  $q$  为  $1.25M_s < q < 2.8M_s$ , 可以取以上两者的平均值即  $q = 2.03M_s \text{ kN/m}^2$  为工程设计时的极限荷载。

## 5.8 各向异性拱型折板结构

如果拱型折板结构的各折板在两个正交方向上有不同的弹性模量  $E$  和泊松比  $\mu$ , 分别记为  $E_1, \mu_1$  和  $E_2, \mu_2$ , 而且在跨度方向上的各板  $E$  和  $\mu$  相同, 我们称其为各向异性拱型折板结构。在工程实际中, 如果拱型折板在跨度方向有钢材或混凝土均匀布置的加劲肋, 通常用本节的各向异性折板求解。

各向异性板在均匀荷载  $q$  作用下的微分方程为

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = q \quad (5.108)$$

式中

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} & D_2 &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} \\ D_3 &= \mu_2 D_1 + 2D_4 & D_4 &= \frac{G h^3}{12} \end{aligned}$$

式中,  $h$  为板厚;  $D_1$ 、 $D_2$  为板在  $x$  与  $y$  方向的弯曲刚度;  $D_k$  为扭转刚度。

用力法对各向异性拱型折板结构进行求解, 其  $k$  棱边的力法方程仍为

$$\delta_{2,k-1}^2 M_{k-1} + \delta_{2,k}^2 M_k + \delta_{2,k}^2 M_k + \delta_{2,k+1}^2 M_{k+1} + \theta_{k,k}^2 + \theta_{k,k}^2 = 0 \quad (5.109)$$

式中,  $M_{k-1}$ 、 $M_k$ 、 $M_{k+1}$  分别是图 5.23 中的  $k-1$ 、 $k$ 、 $k+1$  棱边的未知弯矩。计算第  $k$  棱边时, 其两边的折板分别用  $A$ 、 $B$  板表示。这些力法方程可以按棱边写出  $k$  或  $k-1$  个。但在材料为各向异性时, 式(5.109)中的力法方程系数  $\delta_{i,j}$ 、 $\theta_{i,j}$  等却与 5.6 节中不同。

按折板  $x$  方向两对边铰支承考虑, 各折板的挠度表达式可取

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (5.110)$$

图 5.23 折板坐标及符号

将  $w$  表达式代入式(5.108)中, 得齐次方程为

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( D_2 \frac{\partial^4 Y_m}{\partial y^4} \right) - 2D_3 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{\partial^2 Y_m}{\partial y^2} + D_1 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

这一方程的通解有  $e^{\pm y}$  的形式, 其特征方程为

$$D_2 r^4 - 2D_3 r^2 + D_1 = 0 \quad (5.111)$$

依刚度  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  的数值不同, 有以下几种解答。

1)  $D_3^2 > D_1 D_2$ 。这时方程(5.111)将具有 4 个互不相等的实根, 即  $\pm r_1$  和  $\pm r_2$ 。 $Y_m(y)$  的通解为

$$Y_m(y) = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi r_1 y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi r_1 y}{a} + C_m \operatorname{ch} \frac{m\pi r_2 y}{a} + H_m \operatorname{sh} \frac{m\pi r_2 y}{a} \quad (5.112)$$

2)  $D_3^2 = D_1 D_2$ 。这时方程(5.111)将具有两个实根, 即  $\pm r$ 。 $Y_m(y)$  的通解为

$$Y_m(y) = (A_m + B_m y) \operatorname{ch} \frac{m\pi r y}{a} + (C_m + H_m y) \operatorname{sh} \frac{m\pi r y}{a} \quad (5.113)$$

3)  $D_3^2 < D_1 D_2$ 。这时方程(5.111)具有两个复根, 即  $r_1 \pm ir_2$ 、 $-r_1 \pm ir_2$ 。 $Y_m(y)$  的通解为

$$Y_m(y) = \operatorname{ch} \frac{m\pi r_1 y}{a} \left( A_m \cos \frac{m\pi r_2 y}{a} + B_m \sin \frac{m\pi r_2 y}{a} \right) + \operatorname{sh} \frac{m\pi r_1 y}{a} \left( C_m \cos \frac{m\pi r_2 y}{a} + H_m \sin \frac{m\pi r_2 y}{a} \right) \quad (5.114)$$

以上各式中,  $A_m$ 、 $B_m$ 、 $C_m$ 、 $H_m$  均为系数, 可由边界条件确定。

如果以上级数表达式仅取第一项, 并考虑到力法方程中系数  $\delta_{ij}$  的含义是与外荷载无关的, 设  $y$  方向折板两边的弹性支承的弹性系数分别用  $f_k$ 、 $f_{k+1}$  表示。在  $B$

板  $y=0$  处有  $M_k = 1 \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$  弯矩作用时, 则有边界条件

$$\frac{1}{b} \sin \frac{\pi x}{a} = f_k^B w_1 \quad (y=0)$$

$$\frac{1}{b} \sin \frac{\pi x}{a} = f_{k+1}^B w_1 \quad (y=b)$$

$$-D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 1 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \quad (y=0)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (y=b)$$

由于  $D_3^2$  与  $D_1 D_2$  的大小关系不同, 挠度  $w_1$  具有不同的形式, 即以上三种情况的第一式。

由以上边界条件可以求出系数  $A_1, B_1, C_1, H_1$  等:

1) 当  $D_3^2 > D_1 D_2$  时,

$$A_1 = -\frac{1}{r_1^2 - r_2^2} \left( \frac{a^2}{\pi^2 D_2} + \frac{r_2^2 - \mu_1}{f_k^B b} \right)$$

$$B_1 = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi r_1 b}{a}} \left[ \frac{r_2^2 - \mu_1}{f_{k+1}^B b (r_2^2 - r_1^2)} - A_1 \operatorname{ch} \frac{\pi r_1 b}{a} \right]$$

$$C_1 = \frac{1}{f_k^B b} - A_1$$

$$H_1 = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi r_2 b}{a}} \left( \frac{1}{f_{k+1}^B b} - A_1 \operatorname{ch} \frac{\pi r_1 b}{a} - B_1 \operatorname{sh} \frac{\pi r_1 b}{a} - C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi r_2 b}{a} \right)$$

式中,  $r_1$  与  $r_2$  由  $D_1, D_2, D_3$  表示为

$$r_1 = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2}}{D_2}} \quad r_2 = \sqrt{\frac{D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2}}{D_2}}$$

根据  $A_1, B_1, C_1, H_1$  所得的  $w$  式, 求出单位力矩引起的转角为

$$\delta_{k,k}^B = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \left( B_1 \frac{\pi r_1}{a} + H_1 \frac{\pi r_2}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\begin{aligned} \delta_{k,k+1}^B = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} &= \left[ \frac{\pi r_1}{a} \left( A_1 \operatorname{sh} \frac{\pi r_1 b}{a} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi r_1 b}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi r_2}{a} \left( C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi r_2 b}{a} + H_1 \operatorname{ch} \frac{\pi r_2 b}{a} \right) \right] \sin \frac{\pi x}{a} \end{aligned}$$

进行力法方程(5.109)的求解时, 必须由方程

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = q$$

求出特解。将  $q$  也展成级数, 即有

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

式中,  $q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} dx$ 。如果取板的法向荷载  $q = q_0$  为常数, 则有特解第一项为

$$w_0 = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

$$A_{11} = \frac{16q_0}{\pi^6 \left( \frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{b^4} + \frac{2D_3}{a^2 b^2} \right)}$$

故有

$$\theta_{k,k}^B = \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{16q_0}{\pi^5 b \left( \frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{b^4} + \frac{2D_3}{a^2 b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a}$$

2) 当  $D_3^2 = D_1 D_2$  时,

$$A_1 = \frac{1}{f_{k+1}^B b}$$

$$B_1 = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi r b}{a}} \left[ \frac{\pi(r^2 - \mu_1)}{2r f_{k+1}^B a b} + H_1 \operatorname{sh} \frac{\pi r b}{a} \right]$$

$$C_1 = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi r b}{a}} \left[ \frac{1}{f_{k+1}^B b} - (A_1 + B_1 b) \operatorname{ch} \frac{\pi r b}{a} \right] - H_1 b$$

$$H_1 = -\frac{a}{2\pi r} \left[ \frac{1}{D_2} + (r^2 - \mu_1) A_1 \frac{\pi^2}{a^2} \right]$$

式中,  $r = \sqrt{\frac{D_3}{D_2}}$ 。

根据  $A_1, B_1, C_1, H_1$  所得的  $w$  式, 可以求出单位力矩引起的转角为

$$\theta_{k,k}^B = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \left( B_1 + C_1 \frac{\pi r}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\theta_{k,k+1}^B = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = \left\{ \left[ B_1 + (C_1 + H_1 b) \frac{\pi r}{a} \right] \operatorname{ch} \frac{\pi r}{a} \right.$$

$$\left. + \left[ H_1 + (A_1 + B_1 b) \frac{\pi r}{a} \right] \operatorname{sh} \frac{\pi r b}{a} \right\} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$\theta_{k,k}^B$  的求法同情况 1)。

3) 当  $D_3^2 < D_1 D_2$  时,

$$A_1 = \frac{1}{f_{k+1}^B b}$$

$$B_1 = \left[ \frac{1}{f_{k+1}^B b} \left( \tan \frac{\pi r_1 b}{a} \tan \frac{\pi r_2 b}{a} - \frac{r_1^2 - r_2^2 - \mu_1}{2r_1 r_2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -A_1 \frac{\sin \frac{\pi r_2 b}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi r_1 b}{a}} - H_1 \operatorname{ch} \frac{\pi r_1 b}{a} \sec \frac{\pi r_2 b}{a} \Bigg] \\
& \left/ \left[ \operatorname{sh} \frac{\pi r_1 b}{a} \cos \frac{\pi r_2 b}{a} \left( \tan^2 \frac{\pi r_1 b}{a} \tan^2 \frac{\pi r_2 b}{a} + 1 \right) \right] \right. \\
C_1 = & \left( \frac{1}{f_{k+1}^B} - A_1 \operatorname{ch} \frac{\pi r_1 b}{a} \cos \frac{\pi r_2 b}{a} - B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi r_1 b}{a} \sin \frac{\pi r_2 b}{a} \right. \\
& \left. - H_1 \operatorname{sh} \frac{\pi r_1 b}{a} \sin \frac{\pi r_2 b}{a} \right) \left/ \left( \operatorname{sh} \frac{\pi r_1 b}{a} \cos \frac{\pi r_2 b}{a} \right) \right. \\
H_1 = & \frac{1}{2r_1 r_2} \left[ -\frac{a^2}{\pi^2 D_2} + A_1 (r_1^2 - r_2^2 - \mu_1) \right]
\end{aligned}$$

式中

$$r_1 = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_1 D_3}}{2D_2}} \quad r_2 = \sqrt{\frac{D_1 D_2 - D_3^2}{2D_2(D_3 + \sqrt{D_1 D_2})}}$$

由  $A_1, B_1, C_1, H_1$  可求出单位弯矩引起的转角为

$$\begin{aligned}
\delta_{k,k}^B &= \frac{\pi}{a} (r_2 B_1 + r_1 C_1) \sin \frac{\pi x}{a} \\
\delta_{k,k+1}^B &= \frac{\pi}{a} \left[ \operatorname{sh} \frac{\pi r_1 b}{a} \left( r_1 A_1 \cos \frac{\pi r_2 b}{a} + r_1 B_1 \sin \frac{\pi r_2 b}{a} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - r_2 C_1 \sin \frac{\pi r_2 b}{a} - r_2 H_1 \cos \frac{\pi r_2 b}{a} \right) + \operatorname{ch} \frac{\pi r_1 b}{a} \right. \\
& \quad \left( -r_2 A_1 \sin \frac{\pi r_2 b}{a} + r_2 B_1 \cos \frac{\pi r_2 b}{a} + r_1 C_1 \cos \frac{\pi r_2 b}{a} \right. \\
& \quad \left. \left. + r_1 H_1 \sin \frac{\pi r_2 b}{a} \right) \right] \sin \frac{\pi x}{a}
\end{aligned}$$

$\theta_{k,k}^B$  的求法同情况 1)。

如拱型折板结构各折板材料和厚度相同,各板宽也相同,那么以上计算的  $\delta_{k,k}^B$  与  $\delta_{k,k+1}^B$  就有代表性,其他各折板的棱边单位弯矩下的转角公式均同  $B$  板。

这里应指出,级数解  $w$  仅取第一项,取更多项时的计算方法不变,仅增加计算工作量。在求出  $\delta$  及  $\theta$  值后,可以由棱边的力法方程组求出棱边弯矩。这一过程同 5.6 节。

**算例 5.5** 与 5.6 节中图 5.18 相同,四折板拱型折板结构。每折板长  $a=4\text{m}$ ,宽  $b=2\text{m}$ ,板厚  $h=0.08\text{m}$ 。拱型折板结构受均匀竖向荷载  $q_0=1\text{kN/m}^2$ 。各折板采用不同的两种弹性常数,取  $E_1=2.6 \times 10^4 \text{N/mm}^2$ ,  $E_2=2.1 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ ,  $\mu_1=\mu_2=0$ ,按混凝土材料取值。 $G=1.05 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ 。求棱边弯矩。

**解** 先计算各向异性板的抗弯刚度:



$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} = 1.11 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} = 8.96 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$D_3 = \frac{1}{12} G h^3 = 4.48 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$D_3 = \mu_2 D_1 + 2D_4 = 8.96 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

特征方程为  $D_2 r^4 - 2D_3 r^2 + D_1 = 0$ , 即

$$8.96r^4 - 17.92r^2 + 1.11 = 0$$

由于

$$D_3^2 = 80.2816 \times 10^{12} > D_1 D_2 = 9.9456 \times 10^{12}, \text{故属于第一种情况。}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2}}{D_2}} = 1.3914 \quad r_2 = \sqrt{\frac{D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2}}{D_2}} = 0.2530$$

本结构在跨度方向取较大弹性模量  $E_2$  值。故有

$$f_2^B = f_4^B = \frac{2E_2 A_B \cos \alpha_k}{R \cos \gamma \sin \alpha_k}$$

其中按四折板计算得

$$\sin \alpha_k = 0.923 \quad \cos \alpha_k = 0.383 \quad \cos \gamma = 0.923 \quad R = 2.61$$

求出

$$f_2^B = f_4^B = 1.790 \times 10^{10} \text{ N/m}$$

再求出其他系数为

$$A_1 = -9.6653 \times 10^{-8} \quad B_1 = 9.9127 \times 10^{-8}$$

$$C_1 = 9.708 \times 10^{-8} \quad H_1 = -25.6906 \times 10^{-8}$$

对应转角取  $x = \frac{a}{2}$  处,

$$\delta_{22}^B = 5.7277 \times 10^{-8} \quad \delta_{23}^B = -2.2647 \times 10^{-8}$$

可以计算力法方程中系数

$$\delta_{22} = \delta_{22}^A + \delta_{22}^B = 11.4556 \times 10^{-8}$$

$$\delta_{23} = \delta_{23}^B = -2.2647 \times 10^{-8}$$

$$\delta_{33} = \delta_{22} = 11.4556 \times 10^{-8}$$

外力引起的转角为

$$\theta_{33} = 2 \times \frac{16q_0 \cos \frac{\pi}{8}}{\pi^2 b \left( \frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{b^4} + \frac{2D_3}{a^2 b^2} \right)} = 57.1553 \times 10^{-6}$$

$$\theta_{22} = \frac{16q_0 \cos \frac{\pi}{8}}{\pi^2 b \left( \frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{b^4} + \frac{2D_3}{a^2 b^2} \right)} + \frac{16q_0 \cos \frac{3\pi}{8}}{\pi^2 b \left( \frac{D_1}{a^4} + \frac{D_2}{b^4} + \frac{2D_3}{a^2 b^2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= 28.5776 \times 10^{-6} + 11.8583 \times 10^{-6} \\
&= 40.4359 \times 10^{-6}
\end{aligned}$$

力法方程为

$$\begin{aligned}
11.4552M_2 - 2.2648M_3 + 40.4359 \times 10^2 &= 0 \\
-2.2648M_2 + 11.4552M_3 + 57.1553 \times 10^2 &= 0
\end{aligned}$$

由此求出

$$M_2 = M_4 = -470.03 \text{ N} \cdot \text{m} \quad M_3 = -591.87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

与各向同性拱形折板结构相比,由于各向异性的材料在两个方向的差异,导致棱边弯矩增大,分布的差异也大。

## 第六章 非线性旋转壳结构

### 6.1 旋转壳的基本方程

旋转壳是薄壳的一种。当壳体的厚度远小于壳体中面的最小曲率半径,通常称之为薄壳。在薄壳理论中通常作如下计算假定:1)垂直于中面方向的正应变极其微小,可以不计。2)中面的法线保持为直线,而且中面法线及其垂直线段之间的直角保持不变,即该两个方向剪应变为零。3)与中面平行的截面上的正应力(即挤压应力)远小于其垂直面上的正应力,因而它对形变的影响可以不计。4)体力及面力均可化为作用于中面上的荷载。

旋转壳的力学计算通常引用两个角度为其坐标参量,即绕旋转轴旋转的任一径向线与基准线的夹角  $\theta$ ;绕旋转轴旋转的径向线上任一点的法线与旋转轴的夹角  $\phi$ 。显而易见,旋转壳上的任一点可以由以上两个坐标参量惟一确定。在旋转壳中,将与旋转轴垂直平面与旋转壳相交的轨迹即圆周称之为水平平行圆,这个圆的半径为  $r$ ,根据壳体理论引入的最大与最小两个主曲率,分别记为  $r_1$  与  $r_2$ ,它们在旋转壳中的位置如图 6.1 所示。

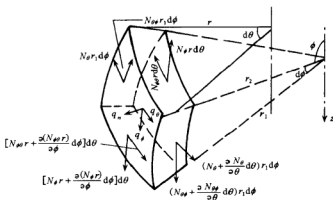


图 6.1 旋转壳微元及顺剪力

在薄壳的内力分析中,分为有薄膜理论与有矩理论两种方法。所谓薄壳的薄膜理论计算,是指薄壳在外力荷载  $q_n, q_\theta, q_\phi$  等作用下,只计算壳面内的顺剪力,而略去壳产生的弯矩和横向剪力。这种受力分析在远离壳边缘的边界约束区域是基本合理的。

旋转壳薄膜理论中的顺剪力通常用  $N_\theta$ 、 $N_\phi$  及  $N_{\theta\phi}$  表示,它是壳厚度上的力,单位为 N/m 或 kN/m,其在微元体上的位置如图 6.1 所示。

按壳体微元的平衡关系,除了图中所画的直观环向、径向、法向不平衡力之外,还可得到环向力在径向产生的合力  $-N_\theta r_1 \cos\phi d\theta d\phi$ ,以及环向混合剪力由于径向上不平行产生的环向合力  $N_{\theta\phi} r_1 \cos\phi d\theta d\phi$ ,可以列出旋转壳薄膜理论的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(N_\phi r)}{\partial\phi} + \frac{\partial N_{\theta\phi}}{\partial\theta} r_1 - N_\theta r_1 \cos\phi + q_\phi r r_1 &= 0 \\ \frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} r_1 + \frac{\partial(N_{\theta\phi} r)}{\partial\phi} + N_{\theta\phi} r_1 \cos\phi + q_\theta r r_1 &= 0 \\ N_\phi r + N_{\theta\phi} r_1 \sin\phi - q_\phi r r_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

考虑壳的力矩及顺剪力和横向剪力的共同作用,在图 6.1 的旋转壳顺剪力基础上,再补充图 6.2 的同一壳微元的横向剪力  $V_\phi$ 、 $V_\theta$  以及弯矩及扭矩。为方便表达,力矩采用双箭头表示,应用右手螺旋法则,而横向剪力仅用单箭头表示。

旋转壳有矩理论的平衡方程是根据图 6.1 与图 6.2 的同一微元体,在考虑三个力及三个力矩的平衡条件后得出的。图 6.2 的力矩平衡可参考图 6.1 的用顺剪力表达的公式(6.1)而得出,有矩理论平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} r_1 + \frac{\partial(N_{\theta\phi} r)}{\partial\phi} + N_{\theta\phi} r \cos\phi - V_\theta r_1 \sin\phi + q_\theta r r_1 &= 0 \\ \frac{\partial(N_\phi r)}{\partial\phi} + \frac{\partial N_{\theta\phi}}{\partial\theta} r_1 - N_\theta r_1 \cos\phi - V_\phi r + q_\phi r r_1 &= 0 \\ N_\phi r + N_{\theta\phi} r_1 \sin\phi + \frac{\partial(V_\phi r)}{\partial\phi} + \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} r_1 - q_\phi r r_1 &= 0 \\ \frac{\partial(M_\phi r)}{\partial\phi} + \frac{\partial M_{\theta\phi}}{\partial\theta} r_1 - M_\theta r_1 \cos\phi - V_\phi r r_1 &= 0 \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial\theta} r_1 + \frac{\partial(M_{\theta\phi} r)}{\partial\phi} + M_{\theta\phi} r_1 \cos\phi - V_\theta r r_1 &= 0 \\ M_{\theta\phi} r - M_{\theta\phi} r_1 \sin\phi + N_{\theta\phi} r r_1 - N_{\phi\theta} r r_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

显然,上述六个方程共有十个未知量。旋转壳的有矩理论的内力分析仅从六个方程来看是超静定的,但薄膜理论方程(6.1)有三个未知量,即  $N_\phi$ 、 $N_\theta$  以及  $N_{\theta\phi}$ (按剪应力互等定理有  $N_{\theta\phi} = N_{\phi\theta}$ ),所以薄膜理论的内力分析是静定的。

旋转壳结构最常见的情况是轴对称情况,即荷载与  $\theta$  无关,这时式(6.2)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(N_\phi r)}{\partial\phi} - N_\theta r_1 \cos\phi - V_\phi r + q_\phi r r_1 &= 0 \\ N_\phi r + N_{\theta\phi} r_1 \sin\phi + \frac{\partial(V_\phi r)}{\partial\phi} - q_\phi r r_1 &= 0 \\ \frac{\partial(M_\phi r)}{\partial\phi} - M_\theta r_1 \cos\phi - V_\phi r r_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

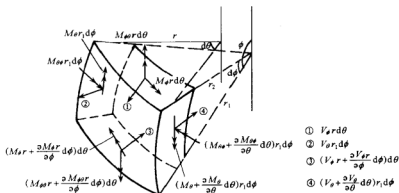


图 6.2 旋转壳微元力矩及横剪力

对于薄膜理论轴对称情况,以上方程还会简化成两个仅含有  $N_\phi$ 、 $N_\theta$  的方程,从方程中直接可以通过积分求出  $N_\phi$ 、 $N_\theta$  内力。

再从几何方面分析图 6.1 的壳微元,显然有

$$r = r_2 \sin \phi \quad (6.4)$$

令  $ds_1 = r_1 d\phi$ ,  $ds_2 = r d\theta$ , 并引入  $z$  方向的微元高度  $dz$ , 必有

$$\sin \phi = \frac{dz}{ds_1} \quad \cos \phi = \frac{dr}{ds_1}$$

由此推出

$$ds_1 = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \quad (6.5)$$

根据  $ds = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2}$ , 可以推出旋转壳中的两个拉梅参数为

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \quad B = r \quad ds = \sqrt{A^2 dz^2 + B^2 d\theta^2}$$

按主曲率公式有

$$K_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{d\phi}{ds_1} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{ds_1} = \frac{d\phi}{dz} \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}}$$

另有

$$\sin \phi = \frac{dz}{\sqrt{dz^2 + dr^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}} \quad \cos \phi = \frac{dr}{ds_1} = \frac{r'}{\sqrt{1 + r'^2}}$$

又因为

$$\frac{d \sin \phi}{dz} = \cos \phi \frac{d\phi}{dz}$$

而

$$\frac{d\sin\phi}{dz} = -\frac{r' r''}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

式中,  $r' = \frac{dr}{dz}$ ,  $r'' = \frac{d^2r}{dz^2}$ 。比较以上两式可知

$$\frac{d\phi}{dz} = -\frac{r''}{(1+r'^2)}$$

将这一结果代入  $K_1$  的表达式中, 可得

$$K_1 = -\frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.6)$$

而按  $r = r_2 \sin\phi$ , 可求出另一主曲率, 为

$$K_2 = -\frac{1}{r(1+r'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.7)$$

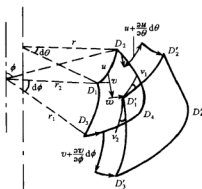


图 6.3 旋转壳微元变形

下面进行旋转壳的变形分析(图 6.3)。原有壳微元  $D_1D_2D_3D_4$  在外力作用下发生变形后成为  $D_1'D_2'D_3'D_4'$ 。这个变形可以用一点的径向位移  $u$ 、环向位移  $v$  以及法向位移  $w$  来描述。将旋转壳中径向线段的伸长比率称为径向线应变  $\epsilon_r$ , 环向线段伸长比率称为环向线应变  $\epsilon_\theta$ , 径向线段和环向线段夹角的变化称为角应变  $\nu_\theta$ 。

显然,  $D_1D_3$  线段变形至  $D_1'D_3'$ , 其中包括径向线段的增量和法向位移  $w$  在径向上的增量, 因此有几何方程

$$\epsilon_r = \frac{\frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi + w d\phi}{r_1 d\phi} = \frac{1}{r_1} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right) \quad (6.8)$$

线段  $D_1D_2$  变形至  $D_1'D_2'$ , 其中包括环向线段增量、法向位移  $w$  在环向上的增量以及径向位移  $v$  在环向上的增量, 因此有另一几何方程, 为

$$\epsilon_\theta = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + w \sin\phi d\theta + v \cos\phi d\theta}{r_2 \sin\phi d\theta} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin\phi} \frac{du}{d\theta} + w + v \cot\theta \right) \quad (6.9)$$

由  $D_1D_2$  与  $D_1D_3$  两线段组成的夹角, 在变形后分别由  $D_1'D_2'$  与  $D_1'D_3'$  组成新的夹角, 其夹角的改变由  $\nu_1$  与  $\nu_2$  组成。 $D_2$  点的径向位移增量为  $\frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$ ,  $D_1D_2$  线段变形后形成的  $D_1'D_2'$ , 其长度为  $\frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + r d\theta$ , 故其角变形  $\nu_1$  为

$$\nu_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta}{\frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + r d\theta} \approx \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (6.10)$$

而  $D_1 D_3$  线段变形后形成的  $D_1' D_3'$ , 其长度应为  $r_1 d\phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi$ , 其环向位移增量为  $u + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi - u \left( 1 + \frac{dr}{r} \right)$ , 故其角变形  $\nu_2$  为

$$\nu_2 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi - u \left( 1 + \frac{dr}{r} \right)}{r_1 d\phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi} \approx \frac{1}{r_1 d\phi} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi - u \frac{dr}{r} \right) \quad (6.11)$$

将  $\nu_1$  与  $\nu_2$  相加得  $\nu_{\theta\theta}$ , 即

$$\nu_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \cos \phi \frac{u}{r} \quad (6.12)$$

旋转壳变形还有两个常用的几何参量, 即环向水平位移  $\Delta H$  和径向线转角  $\psi$ 。前者是环向线水平半径的变化值, 为

$$\Delta H = v \cos \phi + w \sin \phi = \varepsilon_{\theta r} \quad (6.13)$$

后者为

$$\psi = \frac{v}{r_1} - \frac{dw}{ds} \quad (6.14)$$

以上各应变结果仅就旋转壳薄膜理论中面上的位移与应变进行推导, 因而它们主要适用于旋转壳的薄膜理论, 有限制地适用于非薄膜理论。这是因为有矩理论壳体断面上应力是不均匀分布的, 断面上任一点的位移与应变是沿厚度的坐标  $z$  以及该点在壳体上的曲率半径  $r_1$  与  $r_2$  的函数。

在轴对称荷载作用下, 旋转壳没有位移  $u$ , 按弹性应力应变胡克定律可以推得比较简单的内力与位移物理方程, 即

$$N_{\theta} = K \left[ \frac{1}{r_2} (w + v \operatorname{ctg} \phi) + \frac{\mu}{r_1} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right) \right] \quad (6.15)$$

$$N_{\phi} = K \left[ \frac{1}{r_1} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right) + \frac{\mu}{r_2} (w + v \operatorname{ctg} \phi) \right] \quad (6.16)$$

$$M_{\theta} = -D \left[ \frac{\operatorname{ctg} \phi}{r_2} \left( \frac{v}{r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \frac{\mu}{r_1} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{v}{r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \right] \quad (6.17)$$

$$M_{\phi} = -D \left[ \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{v}{r_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \frac{\mu \operatorname{ctg} \phi}{r_2} \left( \frac{v}{r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \right] \quad (6.18)$$

式中,  $K = \frac{Eh}{1-\mu^2}$ ;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ , 其中  $h$  为壳厚,  $\mu$  为泊松比。

对厚度  $h = \text{常数}$  的旋转壳, 将式(6.17)、(6.18)代入有矩理论轴对称平衡方程(6.3)中第三式, 令  $U = V_{\theta r_2}$ , 得

$$\frac{r_2}{r_1} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} + \left[ \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg}\phi + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \frac{d\psi}{d\phi} - \left( \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg}^2\phi + \mu \right) \psi - \frac{r_1 U}{D} = 0 \quad (6.19)$$

将式(6.3)中的前两式分别求出  $N_\theta$ 、 $N_\phi$  用  $V_\phi$  表示的函数,再代入式(6.15)、(6.16)中,可以得出不计外荷载的另一用  $U$  及  $\phi$  表达的方程,为

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 U}{d\phi^2} + \left[ \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg}\phi + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \frac{dU}{d\phi} \\ - \left( \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg}^2\phi - \mu \right) U + K(1 - \mu^2) r_1 \psi = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

式(6.19)、(6.20)即是旋转壳轴对称荷载作用下的用  $U$  及  $\psi$  表示的两个基本方程。 $U$  是内力,  $\psi$  是位移,因而这组方程是混合型方程。这两个方程的求解是微分方程的齐次解,仅考虑边缘干扰力作用下的内力和位移解。外荷载作用下的旋转壳的微分方程的特解即是旋转壳薄膜理论的内力解,它可用材料力学的静力平衡条件来获得,详细求解过程见本章以后内容。

## 6.2 圆柱壳水箱结构的内力分析

在旋转壳结构中,工程上最常用的结构形式是圆柱壳。它是由一条平行于旋转轴的直线绕轴旋转一周而形成的壳体,如图 6.4 所示。

由于在圆柱壳中主曲率半径  $r_1 = \infty$  和  $r_2 = r = a$  ( $a$  为水平平行圆半径),所以圆柱壳是旋转壳的一种特殊形式。在圆柱壳中,由于表达径向位置的旋转壳坐标  $\phi$  ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ) 为常数,所以这里选择距基底的距离  $s$  为坐标变量,另取与初始平面的夹角  $\theta$  为第二坐标变量。对圆柱壳的任一点,由  $s$  和  $\theta$  唯一地将其确定。

这里将式(6.3)的旋转壳轴对称平衡方程具体到圆柱壳结构中。将坐标变量  $\phi$  改为  $s$ ,并代入  $ds = r_1 d\phi$ ,以及  $r_2 = r = a$ ,从而可得

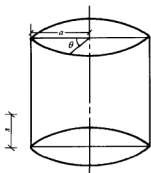


图 6.4 圆柱壳结构

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_s}{ds} + q_s &= 0 \\ N_\theta + \frac{dV_s}{ds} - q_n a &= 0 \\ \frac{dM_s}{ds} - V_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

式中,  $q_s$ 、 $q_n$  分别为圆柱壳所受径向与法向荷载。

轴对称条件下旋转壳的位移仅有径向位移  $v$  和法向位移  $w$ ,引用轴对称条件下旋转壳的几何方程,利用圆柱壳的几何特征  $r_1 = \infty$ ,  $ds = r_1 d\phi$  简化式



(6.15)~(6.18),从而得圆柱壳内力和位移关系,为

$$\left. \begin{aligned} N_s &= K \left( \frac{dv}{ds} + \mu \frac{w}{a} \right) \\ N_\theta &= K \left( \frac{w}{a} + \mu \frac{dv}{ds} \right) \\ M_s &= D \frac{d^2 w}{ds^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

式(6.21)~(6.22)共六个方程,式中有六个未知变量,即  $N_s$ 、 $N_\theta$ 、 $V_s$ 、 $M_s$ 、 $v$ 、 $w$ ,理论上方程是可解的。做为一种理想情况,同时也是工程计算中常采用的方法,是忽略径向外载,即令  $q_s=0$ ,这样相当于略去自重等竖向荷载对结构的影响,由此可以推得  $N_s=0$ 。将  $N_s=0$  代入式(6.22)中第一式,则有

$$\frac{dv}{ds} = -\mu \frac{w}{a}$$

再将上式代入式(6.22)中第二式,可得

$$N_\theta = K \frac{w}{a} (1 - \mu^2)$$

将式(6.21)中第三式两边对  $s$  取导数,得出

$$\frac{dV_s}{ds} = \frac{d^2 M_s}{ds^2}$$

再代回式(6.21)中第二式中,有

$$a \frac{d^2 M_s}{ds^2} + K \frac{w}{a} (1 - \mu^2) = q_n \quad (6.23)$$

考虑式(6.22)中第三式,两边对  $s$  取两次导数,代入式(6.23)中,得到关于  $w$  的最后计算方程,为

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + 4\alpha^4 w = \frac{q_n}{D} \quad (6.24)$$

这是一个常系数微分方程,式中,  $\alpha$  为常数。它的表达式为

$$\alpha = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{ah}$$

式(6.24)的非齐次方程的解可以由两部分构成,即它的常系数齐次方程通解和非齐次方程的一个特解。由于式(6.24)齐次方程是常系数四阶微分方程,所以有由  $\lambda$  表达的特征方程,为

$$\lambda^4 + 4\alpha^4 = 0$$

解出  $\lambda$ , 为

$$\lambda_{1,2} = \pm (1 + i)\alpha$$

$$\lambda_{3,4} = \pm (1 - i)\alpha$$

最后得出挠度  $w$  的齐次解,为

$$w = \beta_1 e^{-as} \cos as + \beta_2 e^{-as} \sin as + \beta_3 e^{as} \cos as + \beta_4 e^{as} \sin as \quad (6.25)$$

式中,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  为积分常数。

很显然, 式(6.25)表达的是一个关于  $s$  变量的衰减振动型函数, 等式右边第一、二项随  $s$  增加而衰减, 第三、四项随  $s$  的减少而衰减。按图 6.4 中的圆柱壳坐标  $s$  指向, 第一、二项应由壳底向上衰减, 第三、四项则由壳顶向下衰减。在一般圆柱形贮水结构中, 圆柱壳结构底部是固定的, 顶部无约束, 所以可以略去式(6.25)中第三、四项, 仅考虑壳底部有矩边缘效应, 将  $w$  齐次解表示为另一组合形式, 即

$$w = ce^{-as} \sin(as + \omega)$$

这是含有两个待定常数  $c$  和  $\omega$  的一般解。再按挠度与内力的微分关系, 可以求出带有  $c, \omega$  两个常数的圆柱壳的内力和变形, 为

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{dw}{ds} = -ace^{-as} 2 \sin\left(as + \omega - \frac{\pi}{4}\right) \\ M_s &= D \frac{d^2 w}{ds^2} = -2a^2 D ce^{-as} \sin\left(as + \omega - \frac{\pi}{4}\right) \\ M_\theta &= \mu M_s \\ V_s &= \frac{dM_s}{ds} = -2\sqrt{2} a^3 e^{-as} \sin\left(as + \omega - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_\theta &= -D\alpha \frac{d^4 w}{ds^4} \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

方程(6.24)的特解, 即是通常由正压力  $q_n$  引起的圆柱壳内力, 可以按壳体的薄膜理论或材料力学中的初等方法(截面法)求解。这时圆柱壳是静定的非约束状态, 在  $q_n$  作用下壳体仅有内力  $N_\theta$ 。在  $s$  高度上截取单位高度, 考虑壳的法向平衡得

$$N_\theta = q_n a \quad (6.27)$$

将这一结果叠加到式(6.26)中的第五式, 即是圆柱壳在法向荷载  $q_n$  作用下有矩内力的全解。因为解的表达式中含有两个待定常数, 它们反映了边界约束条件对壳内力的影响, 可由圆柱壳底部约束条件加以确定。下面给出两种常用的圆柱壳的边界条件, 并求出相应的常数  $c, \omega$  以及内力。

1) 圆柱壳底边缘  $s=0$  处有均匀分布的横向剪力  $V$ , 其余内、外力不存在, 这时圆柱壳两端无约束。利用式(6.26)中第二、四两式列出边界力的条件, 为

$$s=0 \quad V_s = V \quad M_s = 0$$

可以求出

$$c = \frac{V}{2D\alpha^3} \quad \omega = \frac{\pi}{2}$$

此时圆柱壳的各内力及变形为

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{V}{2D\alpha^3} & (s=0) \\ \psi &= -\frac{V}{2D\alpha^2} & (s=0) \\ M_s &= -\frac{V}{\alpha} e^{-\alpha s} \sin(\alpha s) \\ V_s &= \sqrt{2} V e^{-\alpha s} \sin\left(\alpha s + \frac{3}{4}\pi\right) \\ N_\theta &= 2V\alpha e^{-\alpha s} \cos(\alpha s) a \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

通常  $s=0$  处的  $w$  值又可表示为  $\Delta H$ , 称为圆柱壳半径的变化量,  $\psi$  则为转角。

2) 圆柱壳底部边缘  $s=0$  处有均匀分布的径向弯矩  $M$ , 其余内、外力不存在, 此时圆柱壳两端无约束。利用式 (6.26) 中第二、四式可列出力的边界条件, 为

$$s=0 \quad V_s=0 \quad M_s=M$$

分别求出两个常数, 为

$$c = -\frac{\sqrt{2}M}{2D\alpha^2} \quad \omega = -\frac{\pi}{4}$$

此时圆柱壳的内力及变形分别为

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{M}{2D\alpha^2} & (s=0) \\ \psi &= -\frac{M}{D\alpha} & (s=0) \\ M_s &= -\sqrt{2} M e^{-\alpha s} \sin\left(\alpha s + \frac{3}{4}\pi\right) \\ V_s &= -2M\alpha e^{-\alpha s} \cos(\alpha s) \\ N_\theta &= -2\sqrt{2} M\alpha^2 e^{-\alpha s} \sin\left(\alpha s - \frac{\pi}{4}\right) \cdot a \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

如将以上两组解答式 (6.28)、(6.29) 叠加, 即可获得圆柱壳  $s=0$  处, 存在剪力  $V$  和弯矩  $M$  时的壳内力及位移。如果圆柱壳同时受正压力  $q_n$  作用, 则在两组解叠加的基础上,  $N_\theta$  需要再加上特解项  $q_n a$ , 其余内力无变化。

圆柱形贮水结构, 其底部是与基础整体连接的。如果不计  $q_r$ , 即竖向荷载的影响, 同时底部的约束给出圆柱壳的未知径向弯矩  $M$  和未知横向剪力  $V$ , 这样圆柱壳成为在水压  $q_n$  作用下的二次超静定结构, 如图 6.5 所示。

这时求解圆柱壳内力, 必须首先确定  $M$  和  $V$  之值。求解  $M$  和  $V$  可以利用圆柱壳结构的二次超静定的力法求解, 其力法方程为

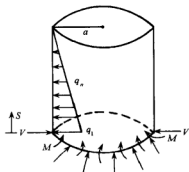


图 6.5 圆柱形贮水结构受力图

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}M + \delta_{12}V + \Delta_{1g} &= 0 \\ \delta_{21}M + \delta_{22}V + \Delta_{2g} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

式中,  $\delta_{11}$ 、 $\delta_{21}$  分别为  $M=1$ , 其余内、外力不存在时, 壳底部的转角  $\frac{dw}{ds}$  和挠度  $w$ ;  $\delta_{12}$ 、 $\delta_{22}$  分别为  $V=1$ , 其余内、外力不存在时, 壳底部的转角  $\frac{dw}{ds}$  和挠度  $w$ ;  $\Delta_{1g}$ 、 $\Delta_{2g}$  分别为在  $M=V=0$  时, 由壳体的内压或外压引起的壳底部的转角  $\frac{dw}{ds}$  和挠度  $w$ 。

力法方程中的  $\delta_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) 系数, 分别由式 (6.28) 与式 (6.29) 求出, 即分别令  $M=1$  和  $V=1$  时求  $s=0$  处的转角  $\psi$  和挠度  $w$ 。

如果壳底部所受外荷载为  $q_1$ , 顶部所受外荷载为  $q_2$ , 壳体高为  $l$ , 仅在内压或外压作用下的圆柱壳是静定结构, 可由式 (6.24) 的方程特解求出壳底部转角和挠度, 分别为

$$w = \frac{(q_1 - q_2)}{4D\alpha^4} \quad \psi = \frac{(q_1 - q_2)}{4Dl\alpha^4}$$

如果令  $\lambda = \frac{1}{\alpha} = 0.76\sqrt{ah}$ , 力法方程各系数能简单地表示为

$$\delta_{11} = \lambda \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2}\lambda^2 \quad \delta_{22} = \frac{1}{2}\lambda^3$$

$$\Delta_{1g} = \frac{\lambda^4}{4l}(q_1 - q_2) \quad \Delta_{2g} = \frac{\lambda^4}{4}(q_1 - q_2)$$

在解出  $M$  和  $V$  之后, 圆柱壳结构分别受  $M$ 、 $V$  作用和内、外压力外荷载作用。主要影响结构设计的内力是壳体的径向弯矩  $M$  和环向拉力  $N_s$ , 它们可由以上三种内力叠加而成, 即

$$M_s = -\frac{V}{\alpha}e^{-\alpha s}\sin(\alpha s) - \sqrt{2}Me^{-\alpha s}\sin\left(\alpha s - \frac{3}{4}\pi\right) \quad (6.31)$$

$$N_s = 2V\alpha ae^{-\alpha s}\cos(\alpha s) - 2\sqrt{2}Ma^2e^{-\alpha s}\sin\left(\alpha s - \frac{\pi}{4}\right) + q_n a \quad (6.32)$$

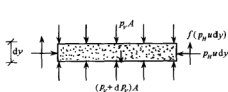


图 6.6 散粒体微元受力

圆柱壳受内、外压的  $q_n$  分布是不同的。如果是水压和土压,  $q_n$  在柱壳高度上呈三角形分布, 如图 6.5 所示。如果圆柱壳是贮物结构, 如装散粒体结构, 这时的内压分布由如图 6.6 所示的微元平衡关系求出。

设有一圆柱壳, 其装  $dy$  微段散粒体, 面积为  $A$ , 周长为  $u$ , 散粒体与壳壁的摩擦系数为  $f$ , 令  $p_v$  表示散粒体的垂直压力,  $p_h$  表示水平压力。显然由图 6.6 中微元的受力平衡关系, 有

$$-(p_v + dp_v)A + p_v A + \gamma A dy - f(p_h u dy) = 0$$

按散粒体的重度为  $\gamma$ 、内摩擦角为  $\phi$ ，则  $p_H$  与  $p_V$  之间的关系有

$$p_H = k p_V \quad k = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

由此得出

$$dy = \frac{dp_V}{\gamma - fk \frac{u}{A} p_V}$$

$$p_H = k p_V = \gamma \frac{A}{fu} \left(1 - e^{-\frac{fu}{A} y}\right) \quad (6.33)$$

这是一个随  $y$  呈指数变化的函数。设壳顶处  $y=0$ ，那么随  $y$  的增加， $p_H$  逐渐增加；在  $y \rightarrow \infty$  时， $p_H = \frac{\gamma A}{fu}$  是散粒体侧压的渐近线。

需要指出的是，本节的圆柱壳不是长圆柱壳，而是中短圆柱壳，其适用范围一般为壳长度  $l$  与壳特征量  $\lambda$  之比在  $2.5 \leq \frac{l}{\lambda} \leq 15$  之间，由于有矩效应是从边界急剧衰减的，对  $\frac{l}{\lambda} > 15$  的长圆柱壳的绝大部分区间来说，其内力主要是薄膜内力，因此本节中的有矩分析的影响范围极小。

这里再分析一下温度变化在圆柱壳贮液等结构中的表现。温度变化主要表现为温差导致圆柱壳结构的膨胀与收缩，这一变形受到壳底或壳顶的约束，产生温度应力。按圆柱壳结构的分析，在两端不受约束条件下，圆柱壳整体收缩或膨胀都不会有有矩应力，有矩应力的产生来自圆柱形贮液结构的底部约束。

如果解除约束，温差变化量为  $T_R$ ， $\alpha$  为结构材料的热膨胀系数，这时温度变化  $t$  相当于加上圆柱壳上一个均匀荷载  $q$ ，其大小为

$$q = \frac{ET_R \alpha}{a}$$

如果圆柱壳有壳底约束，那么这个温度变化荷载  $q$  带给圆柱壳的内力是一种有别于真实液压等荷载在圆柱壳中产生的内力，这时的挠度方程类似于式(6.24)，只是将其中  $q_n$  换成这里的  $q$  即可，为

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + 4\alpha^4 w = \frac{q}{D}$$

上式中荷载  $q$  是一个常数。其解法也类似于圆柱壳液压作用下的内力分析，采用两次超静定力法方程，求出壳底部约束带来的未知弯矩  $M$  及横向剪力  $V$ ，再由公式求出  $M$ 、 $V$  及  $q$  共同作用下圆柱壳的内力  $M_s$  及  $N_s$ 。

将温度荷载  $q$  及外荷载  $q_n$  作用下的内力  $M_s$  及  $N_s$  按不利组合，形成圆柱壳结构设计控制内力，就可以进行圆柱壳的结构设计。

当然，温度应力的分析方法也可采用下节的三次超静定力法，进行更精确的圆柱壳内力计算。

### 6.3 圆柱壳水箱结构的精确方法<sup>1)</sup>

6.2 节在计算圆柱壳贮水等结构的内力时,是假设  $q_r=0$ ,即忽略了圆柱壳结构自重及壳体所受的竖向荷载。方程(6.24)是建立在这一假设基础上的,这一方程在圆柱形结构设计例如圆柱形贮液池、圆柱形贮仓等设计中一直沿用。但是,显然略去  $q_r$  后建立的方程(6.24)是非常粗糙的,因为对自重较大或壳顶有竖向荷载的圆柱壳结构,这样的分析和计算会带来较大的误差,设计也就不十分合理。本书作者在 1991 年指出这一方法不精确、不合理的同时,首先提出了精确设计圆柱壳贮水结构的方法,同时考虑在外荷载  $q_r$  与  $q_s$  作用下,圆柱壳底为同时受径向弯矩  $M$ 、横向剪力  $V$  及竖向反力  $N$  的三次超静定结构,然后建立三次力法方程,获得力法方程各系数。计算结果表明,用这一方法计算的圆柱壳内力与用 6.2 节方法计算的圆柱壳内力有很大区别。

下面具体分析这个圆柱壳结构设计的精确方法。

结构工程中的圆柱壳,主要用于贮水、贮料等结构,这样结构的圆柱壳壁往往是与结构底板整体连接的,底板对壳壁起固定作用。对圆柱壳来说,底板对壳底部有三种约束,即不能相对转动、不能相对横向位移、不能相对竖向位移。

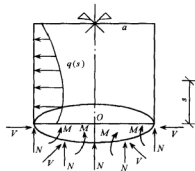


图 6.7 三次超静定圆柱壳

不受约束的两端自由的圆柱壳,其仅在内压或外压作用下的壳体内力,属于静定结构分析范畴,这时的内力可用材料力学的截面平衡条件求出;一端自由、另一端边界上有径向弯矩  $M$  和横向剪力  $V$  作用的圆柱壳结构,壳体同时承受内压或外压,壳体内力的计算在本章第二节中已经给出。现在由于壳与底板不能发生相对竖向位移,所以代之以未知反力  $N$ ,使 6.2 节的二次超静定变为三次超静定,力法方程的系数要重新进行分析。这一未知反力  $N$  可以视为在计算壳结构自重或壳顶施加的竖向

力时而给出的,本节将主要分析由它带来的力法方程系数。

对承受内压  $q(s)$  的圆柱壳结构,其解除约束后的受力如图 6.7 所示。解除底板对圆柱壳的约束,代之以未知反力  $M$ 、 $V$  和  $N$ ,即底板对壳底的弯矩、剪力和轴力,而形成带有三个未知量的三次超静定结构。

与 6.2 节相比,这里多出了未知反力  $N$ 。类似于 6.2 节分析,由此建立如下三次超静定力法方程:

1) 贾乃文,三次超静定圆柱形贮水结构设计,工程力学,1991 年 2 期

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}M + \delta_{12}V + \delta_{13}N + \Delta_{1g} &= 0 \\ \delta_{21}M + \delta_{22}V + \delta_{23}N + \Delta_{2g} &= 0 \\ \delta_{31}M + \delta_{32}V + \delta_{33}N + \Delta_{3g} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

式中,  $\delta_{11}$ 、 $\delta_{21}$ 、 $\delta_{31}$  分别为当  $M=1$ , 其余内、外力不存在时, 柱壳下端的转角  $\frac{dw}{ds}$ 、挠度  $w$  和竖向位移  $v$ ;  $\delta_{12}$ 、 $\delta_{22}$ 、 $\delta_{32}$  分别为当  $V=1$ , 其余内、外力不存在时, 柱壳下端转角  $\frac{dw}{ds}$ 、挠度  $w$  和竖向位移  $v$ ;  $\delta_{13}$ 、 $\delta_{23}$ 、 $\delta_{33}$  分别为当  $N=1$ , 其余内、外力不存在时, 柱壳下端的转角  $\frac{dw}{ds}$ 、挠度  $w$  及竖向位移  $v$ ;  $\Delta_{1g}$ 、 $\Delta_{2g}$ 、 $\Delta_{3g}$  分别为当  $M=V=N=0$ , 仅在外荷载  $q(s)$  作用下时, 柱壳下端的转角  $\frac{dw}{ds}$ 、挠度  $w$  及竖向位移  $v$ 。

下面给出以上各力法方程的系数推导和计算过程。设柱壳半径为  $a$ , 厚度为  $h$ ,  $D$  为抗弯刚度, 在仅有单位弯矩存在于圆柱壳底时, 由前节公式可知, 壳底的挠度  $w$  和转角  $\psi$  即  $\frac{dw}{ds}$  为

$$w = \frac{1}{2Da^2} \quad \psi = -\frac{1}{Da}$$

在壳底仅有横向的单位剪力时, 按 6.2 节公式可知, 壳底的挠度  $w$  和转角  $\psi$  为

$$w = \frac{1}{2Da^3} \quad \psi = -\frac{1}{2Da^2}$$

如果  $q(s)$  是线性分布的, 令  $q_1$  为底部  $s=0$  处的荷载值,  $q_2$  为壳顶处的荷载值, 那么壳仅在分布荷载  $q(s)$  作用下时, 壳底的挠度  $w$  和转角  $\psi$  分别是

$$w = \frac{q_1 - q_2}{4Da^4} \quad \psi = \frac{q_1 - q_2}{4Da^4 l}$$

式中,  $l$  为圆柱壳长度。

按力法方程(6.34)的系数定义, 以上各量分别表达成

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \lambda & \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{1}{2}\lambda^2 & \delta_{22} &= \frac{1}{2}\lambda^3 \\ \Delta_{1g} &= \frac{\lambda^4}{4l}(q_1 - q_2) & \Delta_{2g} &= \frac{\lambda^4}{4}(q_1 - q_2) \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

式中,  $\lambda = 0.76 \sqrt{ah}$ 。

系数  $\delta_{13}$  和  $\delta_{23}$  表示圆柱壳仅在底部有竖向反力  $N=1$  时, 在壳底引起的转角和挠度。按系数矩阵的对称性, 它们分别与  $\delta_{31}$  和  $\delta_{32}$  相等, 而  $\delta_{31}$  和  $\delta_{32}$  则是圆柱壳在底部分别由  $M=1$  和  $V=1$  引起的竖向位移。按位移  $v$  的计算公式可得

$$u = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 ds \quad (6.36)$$

当  $M$  单独作用于圆柱壳时, 上式中的  $w$  应代之以下式:

$$w = -\frac{M}{\sqrt{2} D \alpha^2} e^{-\alpha s} \sin\left(\alpha s - \frac{\pi}{4}\right)$$

当  $V$  单独作用于圆柱壳时, 式(6.36)中的  $w$  应代之以以下式:

$$w = -\frac{V}{2 D \alpha^3} e^{-\alpha s} \sin\left(\alpha s + \frac{\pi}{2}\right)$$

上两式中  $w$  都是由 6.2 节中相关公式推导出来的。由以上式(6.36)可求出力法方程系数  $\delta_{13}$  和  $\delta_{23}$ , 分别是

$$\left. \begin{aligned} \delta_{13} &= \delta_{31} = \frac{3\lambda^3}{8D^2} \\ \delta_{23} &= \delta_{32} = \frac{3\lambda^5}{16D^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

由竖向力  $N=1$  引起的圆柱壳竖向位移  $\delta_{33}$ , 可由单位周长的柱壳受压力  $N$  作用下应变和位移关系求出, 为

$$\delta_{33} = \frac{l}{Eh} \quad (6.38)$$

外荷载  $q(s)$  使圆柱壳底产生的竖向位移  $\Delta_{3q}$  可分两部分计算, 其中一部分为假定  $N=0$  时的竖向位移, 此时利用内力与位移关系可得

$$N_s = K \left( \frac{dv}{ds} + \mu \frac{w}{a} \right)$$

当  $N_s=0$  时,

$$v = \int_0^l \left( -\mu \frac{w}{a} \right) ds$$

此时积分号中  $w$  的取值(在  $q(s)$  为线性分布时)为  $\frac{\lambda^4}{4D} q_s$ , 其中  $q_s = \frac{l-s}{l} q_1$ , 代入之后求得

$$v = \frac{\mu \lambda^4}{8aD} q_1$$

其中第二部分是由自重等引起的竖向位移, 可按材料力学方法求出为  $-\frac{\gamma l^2}{2E}$ , 式中  $\gamma$  为圆柱壳材料的重度, 负号表示此位移与第一部分相反。

将以上两部分叠加, 即

$$\Delta_{3q} = \frac{\mu \lambda^4 q_1}{8aD} - \frac{\gamma l^2}{2E} \quad (6.39)$$

综合以上各系数公式, 列出力法方程

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{D} & \frac{\lambda^2}{2D} & \frac{\lambda^3}{8D^2} \\ \frac{\lambda^2}{2D} & \frac{\lambda^3}{2D} & \frac{3\lambda^5}{16D^2} \\ \frac{\lambda^3}{8D^2} & \frac{3\lambda^5}{16D^2} & \frac{l}{Eh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ V \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\lambda^4}{4Dl} (q_1 - q_2) \\ \frac{\lambda^4}{4D} q_1 \\ \frac{\mu \lambda^4 q_1}{8aD} - \frac{\gamma l^2}{2E} \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$



解此方程,会得出超静定内力  $M$ 、 $V$ 、 $N$ 。因为影响圆柱壳结构设计的主要内力为  $M_s$ 、 $N_\theta$  和  $N_z$ ,所以应分别计算由  $M$ 、 $V$ 、 $N$  等在圆柱壳引起的内力  $M_s$ 、 $N_\theta$  和  $N_z$  等,后者可由 6.2 节和本节中公式求出。

在剪力  $V$  单独作用下

$$M_s = -\frac{V}{a}e^{-\alpha}\sin(\alpha s)$$

$$N_\theta = 2V\alpha e^{-\alpha}\cos(\alpha s)a$$

在弯矩  $M$  单独作用下,

$$M_s = -\sqrt{2}Me^{-\alpha}\sin\left(\alpha s - \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$N_\theta = -2\sqrt{2}M\alpha^2e^{-\alpha}\sin\left(\alpha s - \frac{\pi}{4}\right)a$$

在竖向力  $N$  单独作用下,

$$M_s = -Nw$$

$$N_\theta = M\frac{N}{l}(l-s)$$

这里的  $w$  是由已知外荷载  $q(s)$  和待定所求内力  $M$ 、 $V$ 、 $N$  等共同引起的圆柱壳的总挠度。

外荷载  $q(s)$  单独引起的薄膜内力  $N_s$  和  $N_\theta$  为

$$N_s = -\gamma h(l-s)$$

$$N_\theta = \gamma_0(l-s)a$$

式中,  $\gamma$  为圆柱壳结构的材料重度;  $\gamma_0$  为外荷载  $q(s)$  荷载体材料重度。

综合以上各式,可得圆柱壳结构设计中的主要内力,为

$$M_s = -\frac{V}{a}e^{-\alpha}\sin(\alpha s) - \sqrt{2}Me^{-\alpha}\sin\left(\alpha s - \frac{3\pi}{4}\right) - Nw \quad (6.41)$$

$$N_\theta = -2V\alpha e^{-\alpha}\cos(\alpha s)a + 2\sqrt{2}M\alpha^2e^{-\alpha}\sin\left(\alpha s - \frac{\pi}{4}\right) \\ \cdot a + \gamma_0(l-s)a + \mu\frac{N}{l}(l-s) \quad (6.42)$$

$$N_z = (N - \gamma hl)\left(1 - \frac{s}{l}\right) \quad (6.43)$$

现以设计实例说明圆柱形贮液结构这一类圆柱壳结构,在计入竖向荷载前后,壳中内力的大小与区别。

**算例 6.1** 设计圆柱形水池池壁,池高  $l=4\text{m}$ ,池平均直径  $2a=8\text{m}$ ,按满水设计,混凝土壁厚  $h=15\text{cm}$ 。分别用二次超静定与三次超静定方法计算池壁的内力。

混凝土重度  $\gamma=25\times 10^3\text{N/m}^3$ ,  $\mu=\frac{1}{6}$ 。

**解** 由于该结构

$$\lambda = 0.76 \sqrt{ah} = 0.59 \quad 2.5 \leq \frac{l}{\lambda} = 6.76 \leq 15$$

故属于 6.2 节计算范围。现计算力法方程各系数。

取荷载系数为 1.2, 故有

$$q_1 = \gamma l = -48 \text{ kN/m}^2$$

$$\delta_{11} = \lambda = 0.59$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2} \lambda^2 = 0.174$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2} \lambda^3 = 0.103$$

$$\Delta_{1q} = \frac{\lambda^4}{4l} q_1 = -0.036$$

$$\Delta_{2q} = \frac{\lambda^4}{4} q_1 = -0.144$$

解二次力法方程, 有

$$0.59M + 0.174V = 0.036$$

$$0.174M + 0.103V = 0.144$$

得出池壁底处的约束内力, 为

$$M = -7.12 \text{ kN} \cdot \text{m/m} \quad V = 26.16 \text{ kN/m}$$

再用本节的三次超静定方法。力法方程各系数分别用  $D$  表达, 其中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = 7376.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{D} & \frac{\lambda^2}{2D} & \frac{\lambda^3}{8D^2} \\ \frac{\lambda^2}{2D} & \frac{\lambda^3}{2D} & \frac{3\lambda^5}{16D^2} \\ \frac{\lambda^3}{8D^2} & \frac{3\lambda^5}{16D^2} & \frac{l}{Eh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8055 \times 10^{-4} & 0.2393 \times 10^{-4} & 0.1446 \times 10^{-8} \\ 0.2393 \times 10^{-4} & 0.1422 \times 10^{-4} & 0.2552 \times 10^{-9} \\ 0.1446 \times 10^{-8} & 0.2552 \times 10^{-9} & 0.1046 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

在静水压力下荷载系数为

$$\begin{Bmatrix} \frac{\lambda^4}{4Dl} q_1 \\ \frac{\lambda^4}{4D} q_1 \\ \frac{\mu l \lambda^4 q_1}{8aD} - \frac{\gamma l^2}{2E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5069 \times 10^{-4} \\ 0.2028 \times 10^{-4} \\ 0.26 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

由此可求出池壁底的约束内力, 为

$$M = -7.26 \text{ kN} \cdot \text{m/m} \quad V = 26.4 \text{ kN/m} \quad N = 24.68 \text{ kN/m}$$

按二次超静定(即底部仅有  $M$  和  $V$  约束)方法计算的圆柱壳的设计内力为

$$M_s = -\frac{V}{\alpha} e^{-\alpha s} \sin(\alpha s) - \sqrt{2} M e^{-\alpha s} \sin\left(\alpha s - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$N_{\theta} = -2Vae^{-a}\cos(as) + 2\sqrt{2}Ma^2ae^{-a}\sin\left(as - \frac{\pi}{4}\right)$$

将上两式与式(6.41)~(6.43)中的内力相比较,结果如表 6.1 所示。

表 6.1 用两种计算方法计算的内力  $M$ 、 $V$ 、 $N$  的比较表

池高 $s/\text{m}$	$N_1^2/(\text{kN}/\text{m})$	$N_2^2/(\text{kN}/\text{m})$	$N_3^2/(\text{kN}/\text{m})$	$M_1^2/(\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m})$	$M_2^2/(\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m})$
0.0	5.23	0.36	4.29	-7.12	-7.26
0.4	4.68	48.00	48.97	-0.06	-10.21
0.8	4.16	106.80	105.93	1.63	-6.31
1.2	3.64	130.68	130.85	1.26	-2.39
1.6	3.12	124.80	126.78	0.56	-0.26
2.0	2.60	105.00	107.80	0.01	0.42
2.4	2.08	81.84	34.45	-0.05	0.41
2.8	1.56	59.64	61.51	-0.06	0.22
3.2	1.04	38.85	40.03	-0.01	0.04
3.6	0.52	19.08	19.62	-0.01	0.01
4.0	0.60	0.00	-0.00	0.00	0.00

将以上两种方法所得内力  $M$ 、 $N$  绘图比较,可以明显地说明其差别。由图 6.8 比较  $M$ , 可知,用三次超静定理论计算出的  $M$ , 最大值比二次超静定理论计算的  $M$ , 最大值要大;三次超静定理论计算的最大弯矩  $M$ , 的位置也不在池底,在池底上部约 0.35~0.45m 之处,这是由于有  $N$  作用而导致的结果。由图 6.9  $N$ , 比较图可看出,两种方法计算出的  $N$  分布不同,三次超静定最大环拉力位置比二次超静定环拉力最大位置要高,约在距底部 1.4m 处,而二次超静定环拉力最大位置约在距底部 1.2m 左右;此外三次超静定尚有  $N$ , 的分布。

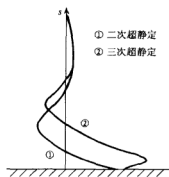


图 6.8  $M$ , 比较图

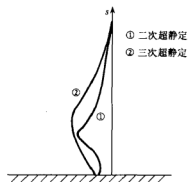


图 6.9  $N$ , 比较图

## 6.4 球壳结构的有矩计算

球壳也是旋转壳的一种,它的几何特征是壳中面  $r_1=r_2=R$ ,其中  $R$  为中面球半径。引入旋转壳两个坐标,即径向线平面与基准线平面夹角  $\theta$ ,径向线任一点法线与旋转轴夹角  $\phi$ 。两个坐标参量  $\theta$  与  $\phi$  可惟一地确定球壳的点。在球壳中,由  $r_1=r_2=R$ ,得出  $r=R\sin\phi$ 。由旋转壳理论的一般方程(6.19)和式(6.20),利用球壳的这一几何特征,简化式(6.19)与式(6.20),为

$$\left. \begin{aligned} L(\psi) - \frac{\mu\psi}{R} - \frac{U}{D} &= 0 \\ L(U) + \frac{\mu}{R}U + K(1 - \mu^2)\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

式中,  $U=V_\phi R$ ,即为径向横剪力  $V_\phi$ 与球半径  $R$  的乘积; $\psi$  则是径向转角;微分算子  $L(\ )$  在球壳情况下表示为

$$L(\ ) = \frac{1}{R} \frac{d^2}{d\phi^2}(\ )$$

由方程(6.44)可知,若能从方程中解出  $V_\phi$  与  $\psi$ ,则  $V_\phi$  及  $\psi$  都为转角  $\phi$  的二阶导数。这样的混合方程求解起来有一定困难。在球壳结构的工程设计与计算中,常作些适当简化。这种简化主要是从有矩内力的边缘效应方面考虑,也就是根据旋转壳结构的精确计算证明,有矩内力主要表现在边缘附近,远离边缘的壳体在外部均匀荷载作用下基本呈现薄膜内力即仅有顺剪力。因边缘效应而导致的内力及位移都具有急剧衰减振动特性,也就是  $V_\phi$  及  $\psi$  从壳边向内急剧变小,所以在数学表达上,导数越大项,其值越大,即

$$\frac{d^2 V_\phi}{d\phi^2} \gg \frac{dV_\phi}{d\phi} \gg V_\phi, \quad \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} \gg \frac{d\psi}{d\phi} \gg \psi$$

这样可以简化方程式(6.44),为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} - \frac{V_\phi R}{D} &= 0 \\ \frac{d^2 V_\phi}{d\phi^2} - K(1 - \mu^2)\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

利用代入法解方程式(6.45),可以得出以  $\phi$  为变量的关于  $V_\phi$  的常系数方程,为

$$\frac{d^4 V_\phi}{d\phi^4} + 4\alpha^4 V_\phi = 0 \quad (6.46)$$

式中,  $\alpha^4 = 3(1 - \mu^2) \frac{R^2}{h^3}$ ,其中  $h$  为球壳厚度。

齐次方程(6.46)的解容易求出,为

$$V_{\phi} = \beta_1 e^{-\alpha\phi} \cos \alpha\phi + \beta_2 e^{-\alpha\phi} \sin \alpha\phi + \beta_3 e^{\alpha\phi} \cos \alpha\phi + \beta_4 e^{\alpha\phi} \sin \alpha\phi \quad (6.47)$$

式中,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  分别是待定的积分常数。

图 6.10 表示在正压力  $q_n$  作用下的圆球壳。按图示坐标  $\phi$  的取值方向, 在  $V_{\phi}$  表达式 (6.47) 中, 等式右边第三、四项表示球壳边缘附近的衰减值, 而等式右边第一、二项表示壳顶开孔时, 孔边内力的衰减值。

如果球壳边缘的  $\phi$  值已知为  $\phi_1$ , 并引入变量  $\xi = \phi_1 - \phi$ , 那么在壳顶不开孔时球壳的解  $V_{\phi}$  的表达式为

$$V_{\phi} = c e^{-\alpha\xi} \sin(\alpha\xi + \omega) \quad (6.48)$$

式中,  $c$  和  $\omega$  为待定积分常数。利用微分关系可以根据式 (6.48) 进一步推出球壳的其他内力和变形, 为

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta} &= -\sqrt{2} c \alpha e^{-\alpha\xi} \sin\left(\alpha\xi + \omega - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_{\phi} &= -c \alpha e^{-\alpha\xi} \sin(2\xi + \omega) \operatorname{ctg}(\phi_1 - \xi) \\ \phi &= -\frac{2\alpha^2}{Eh} c \alpha e^{-\alpha\xi} \cos(\alpha\xi + \omega) \\ M_{\theta} &= \frac{Rc}{2\alpha} e^{-\alpha\xi} \sin\left(\alpha\xi + \omega + \frac{\pi}{4}\right) \\ M_{\phi} &= \mu M_{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

球壳边缘的水平位移  $\Delta u$  是结构设计中的一个重要参量, 可利用旋转壳轴对称公式来计算它, 其可表示为

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{R}{Eh} (N_{\theta} - \mu N_{\phi}) \\ &= \frac{-R}{Eh} \sin(\phi_1 - \xi) \left[ \sqrt{2} c \alpha e^{-\alpha\xi} \sin\left(\alpha\xi + \omega - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.50)$$

在轴对称荷载作用下求解球壳时, 以向外变形  $w$  为正, 而这时径向转角  $\phi$  刚好为负。

式 (6.48) 中的待定常数  $c, \omega$  与圆柱壳解法类似, 应由边界条件加以确定。图 6.10 画出了球壳边缘受水平力  $H$  和径向弯矩  $M$  的两种情况, 可以分别求解如下:

(1) 球壳边缘仅有水平力  $H$  时

即在边界条件  $\phi = \phi_1$  处,  $M_{\phi} = 0, V_{\phi} = -H \sin \phi_1$ , 代入式 (6.49), 可得

$$c = 2H \sin \phi_1 \quad \omega = \frac{\pi}{4}$$

各相应内力为

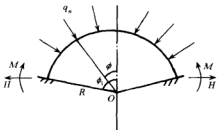


图 6.10 正压力下的球壳

$$\begin{aligned}
V_{\phi} &= \sqrt{2} \sin \phi_1 e^{-\alpha \xi} \sin \left( \alpha \xi - \frac{\pi}{4} \right) H \\
N_{\theta} &= -2\alpha \sin \phi_1 e^{-\alpha \xi} \sin \left( \alpha \xi - \frac{\pi}{2} \right) H \\
N_{\phi} &= -\sqrt{2} \operatorname{ctg}(\phi_1 - \xi) \sin \phi_1 e^{-\alpha \xi} \sin \left( \alpha \xi - \frac{\pi}{4} \right) H \\
M_{\phi} &= \frac{R}{\alpha} \sin \phi_1 e^{-\alpha \xi} \sin(\alpha \xi) H \\
\Delta u &= \frac{2R\alpha \sin^2 \phi_1}{Eh} H \quad (\phi = \phi_1) \\
\psi &= -\frac{2\alpha^2 \sin \phi_1}{Eh} H \quad (\phi = \phi_1)
\end{aligned}$$

(2) 球壳边缘仅有径向弯矩  $M$  时

即在边界条件  $\phi = \phi_1$  处,  $M_{\phi} = M$  和  $V_{\phi} = 0$ , 代入式(6.49)中, 可得

$$c = \frac{2\alpha M}{R} \quad \omega = 0$$

各相应内力为

$$\begin{aligned}
V_{\phi} &= \frac{2\alpha}{R} e^{-\alpha \xi} \sin(\alpha \xi) M \\
N_{\theta} &= -\frac{2\sqrt{2}\alpha^2}{R} e^{-\alpha \xi} \sin \left( \alpha \xi - \frac{\pi}{4} \right) M \\
N_{\phi} &= \frac{2\alpha}{R} \operatorname{ctg}(\phi_1 - \xi) e^{-\alpha \xi} \sin(\alpha \xi) M \\
M_{\phi} &= \sqrt{2} e^{-\alpha \xi} \sin \left( \alpha \xi + \frac{\pi}{4} \right) M \\
\Delta u &= \frac{2\alpha^2 \sin \phi_1}{Eh} M \quad (\phi = \phi_1) \\
\psi &= -\frac{4\alpha^3}{ERh} M \quad (\phi = \phi_1)
\end{aligned}$$

如果球壳边缘同时存在水平力  $H$  和径向弯矩  $M$ , 那么球壳的内力和变形即是以上两组对应值的叠加。

一底端有固定约束的球壳, 设其受均匀正压力  $q_n$  分布荷载作用, 那么解除底端约束后, 会产生未知的水平推力  $H$  和径向弯矩  $M$ , 形成球壳的二次超静定结构, 如图 6.10 所示。如果用力法求此二次超静定球壳, 则力法方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}M + \delta_{12}H + \Delta_{1q} = 0 \\ \delta_{21}M + \delta_{22}H + \Delta_{2q} = 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

式中,  $\delta_{11}$ 、 $\delta_{21}$  分别为  $M=1$ , 球壳其余力不存在时, 壳边  $\phi = \phi_1$  处的径向转角  $\psi$  及水平位移  $\Delta u$ ;  $\delta_{12}$ 、 $\delta_{22}$  分别为  $H=1$ , 球壳其余力不存在时, 壳边  $\phi = \phi_1$  处的径向转角  $\psi$  及水平位移  $\Delta u$ ;  $\Delta_{1q}$ 、 $\Delta_{2q}$  分别为  $M=H=0$ , 球壳受外荷载  $q_n$  作用时, 壳边  $\phi = \phi_1$  处

的径向转角  $\psi$  及水平位移  $\Delta u$ 。

按本节中(1)、(2)两种情况下的公式,可以求出力法方程(6.51)的系数,为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= -\frac{4a^3}{EhR} \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = -\frac{2a^2 \sin \phi_1}{Eh} \\ \delta_{22} &= +\frac{2R a \sin \phi_1}{Eh} \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

由于  $\Delta_{1q}$  与  $\Delta_{2q}$  是仅由法向外荷载  $q_n$  引起的球壳薄膜内力下的变形,所以应当用球壳薄膜理论求解。球壳的薄膜内力仅有  $N_\theta$  与  $N_\phi$  两种,这里采用材料力学方法进行分析。如果设球壳受均匀分布法向荷载  $q_n$  作用,那么利用任意水平半径  $r$  处割出的上部球壳在竖向的平衡,可求出径向力  $N_\phi$ ,为

$$N_\phi = -\frac{1}{2} q_n R \quad (6.53)$$

再由球壳平衡方程

$$N_\theta + N_\phi = R q_n$$

得

$$N_\theta = -\frac{1}{2} q_n R \cos 2\phi \quad (6.54)$$

在仅有  $q_n$  作用下,求出

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1q} &= 0 \\ \Delta_{2q} &= \frac{(1-\mu)q_n R^2}{2Eh} \sin \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

将以上系数表达式(6.52)和式(6.55)代入力法方程中,从而求出具有球半径  $R$  及幅角  $\phi_1$  的球壳边缘力  $M$  和  $H$ ,分别为

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{(1-\mu)q_n R^2}{4a^2} \\ H &= \frac{(1-\mu)q_n R}{2a \sin \phi_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

分别将  $M$  和  $H$  单独作用引起的球壳中的主要内力  $M_\phi$  与  $N_\theta$  叠加,再与由外荷载  $q_n$  引起的球壳的薄膜内力  $N_\phi$  相加,即会得出结构工程中球壳结构设计的主要内力,为

$$M_\phi = \frac{q_n R^2 (1-\mu)}{4a^2} e^{-a(\phi_1-\phi)} [\cos a(\phi_1-\phi) - \sin a(\phi_1-\phi)] \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} N_\theta = & -\frac{q_n R}{2} \{1 - (1-\mu)e^{-a(\phi_1-\phi)} [\cos a(\phi_1-\phi) \\ & + \sin a(\phi_1-\phi)]\} \end{aligned} \quad (6.58)$$

## 6.5 非线性变厚度球壳结构<sup>1)</sup>

在结构工程中,会遇到如图 6.11 所示的非线性变厚度球壳结构。该球壳中心线是半径为  $R$  的球面,壳顶厚度为  $h_0$ ,则球壳的厚度  $h$  为幅角  $\phi$  的非线性函数,即

$$h = h_0(1 + \beta\phi)^2 \quad (6.59)$$

式中,  $\beta$  为表明厚度变化的因子。

引入旋转壳变厚度下的求解方程,即

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2(V\varphi_2)}{d\phi^2} + \left[ \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg}\phi - \frac{r_2}{r_1 h} \frac{dh}{d\phi} + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \frac{d(V\varphi_2)}{d\phi} \\ - \left( \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg}^2\phi - \mu - \frac{\mu}{h} \frac{dh}{d\phi} \operatorname{ctg}\phi \right) (V\varphi_2) - K(1 - \mu^2)r_1\psi = 0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} + \left[ \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg}\phi + \frac{3r_2}{r_1 h} \frac{dh}{d\phi} + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \frac{d\psi}{d\phi} \\ - \left( \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg}^2\phi + \mu - \frac{3\mu}{h} \frac{dh}{d\phi} \operatorname{ctg}\phi \right) \psi - \frac{r_1 r_2 V_\phi}{D} = 0 \end{aligned} \quad (6.61)$$

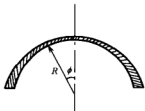


图 6.11 变厚度球壳

以上的一组齐次方程的解,再加上由外荷载如正压力等引起壳中的薄膜内力,即是变厚度旋转壳有矩理论下的全解。以上一组齐次方程的变量是  $V_\phi$  及  $\psi$ ,在球壳中有  $r_1 = r_2 = R$ 。

在计算变厚度球壳时,其边缘效应和常厚度球壳一样,假设这一影响是局部的,变厚度球壳的内力和转角变形从边缘开始向壳中急剧衰减,因而在数学表达上有

$$\frac{d^2 V_\phi}{d\phi^2} \gg \frac{dV_\phi}{d\phi} \gg V_\phi$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\phi^2} \gg \frac{d\psi}{d\phi} \gg \psi$$

据此可以简化式(6.60)、(6.61)。再代入球壳特征数  $r_1 = r_2 = R$ ,可以得出变厚度球壳的控制解方程,为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 V_\phi}{d\phi^2} + Eh\psi &= 0 \\ \frac{d(h^2\psi)}{d\phi^2} - \frac{R^2 h^2}{D} V_\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

在求解方程(6.62)时,可以采用代入法,考虑厚度  $h$  为  $\phi$  的变量,可得出关于  $V_\phi$  的微分方程为

1) 贾乃文. 非线性变厚度球壳正压力下有矩解. 应用数学与力学, 1990 年 11 期



$$(1 + \beta\phi)^4 \frac{d^4 V_\phi}{d\phi^4} + 4\beta(1 + \beta\phi)^3 \frac{d^3 V_\phi}{d\phi^3} + 2\beta^2(1 + \beta\phi)^2 \frac{d^2 V_\phi}{d\phi^2} + \frac{12(1 - \mu^2)}{h_0^2} R^2 V_\phi = 0$$

如果令  $(1 + \beta\phi) = e^x$ , 可将上式简化成为关于  $x$  的常系数方程, 为

$$\frac{d^4 V_\phi}{dx^4} - 2 \frac{d^3 V_\phi}{dx^3} + \frac{d^2 V_\phi}{dx^2} + \frac{12(1 - \mu^2)R^2}{h_0^2 \beta^4} V_\phi = 0 \quad (6.63)$$

这一微分方程的特征方程为

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{12(1 - \mu^2)R^2}{h_0^2 \beta^4} = 0$$

引入  $\lambda = z + \frac{1}{2}$ , 并且  $\alpha = \frac{12(1 - \mu^2)R^2}{h_0^2 \beta^4} > 0$ , 得用  $z$  表示的新特征方程, 为

$$z^4 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{16} + \alpha = 0$$

由此解出

$$z_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm i\sqrt{\alpha}}$$

反过来得出  $\lambda$  值为

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm i\sqrt{\alpha}}$$

这一结果更广义的表达式为

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm (m \pm in) \quad (6.64)$$

$$\text{式中, } m = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{16} + \alpha} + \frac{1}{4} \right)}; n = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{16} + \alpha} - \frac{1}{4} \right)}.$$

这样,  $V_\phi$  的一般解为

$$V_\phi = e^{mx}(c_1 \cos nx + c_2 \sin nx) + e^{-mx}(c_3 \cos nx + c_4 \sin nx) \quad (6.65)$$

式中,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  分别为积分常数。

应当指出的是, 这里的变量  $x$  是中间变量, 它与球壳真实变量  $\phi$  之间存在的关系为:  $x = \ln(1 + \beta\phi)$ 。所以在给定  $\phi$  时, 要由这一关系化成  $x$  变量, 再由式 (6.65) 求  $V_\phi$ 。

类似于圆柱壳的分析, 式 (6.65) 是衰减振动型函数, 在球壳顶部不开孔时, 式 (6.65) 中的  $c_3$  与  $c_4$  必为零; 只有在球壳顶开孔时,  $c_3$  与  $c_4$  项才有意义。球壳顶不开孔时, 应当利用球壳边缘的边界条件求出  $c_1$  与  $c_2$ 。

变厚度球壳边缘的边界条件类似于常厚度球壳, 即在  $\phi = \phi_1$  处, 已知径向弯矩  $M_\phi$  或者径向横向剪力  $V_\phi$ , 则可分别确定出  $c_1$  与  $c_2$ , 也可利用  $\phi = \phi_1$  处的变形条件来确定  $c_1$  与  $c_2$ 。

下面以壳顶不开孔的情况为例, 由  $V_\phi$  进而求出其他内力:

$$\left.
\begin{aligned}
V_\theta &= e^{mx}(c_1 \cos nx + c_2 \sin nx) \\
N_\theta &= -e^{mx} \operatorname{ctg} \phi (c_1 \cos nx + c_2 \sin nx) \\
N_\phi &= -\beta e^{(m-1)x} [(mc_1 + nc_2) \cos nx + (mc_2 - nc_1) \sin nx] \\
\psi &= \frac{\beta^2 e^{(m-4)x}}{Eh_0} \{ [(m^2 - m - n^2)c_1 + n(2m - 1)c_2] \cos nx \\
&\quad + [(m^2 - m - n^2)c_2 - n(2m - 1)c_1] \sin nx \} \\
M_\theta &= \frac{h_0^2 \beta^3}{12(1 - \mu^2)R} e^{(m+1)x} \{ [(-5m^2 - 3mn + m^3 - 5n^2 + 4m)c_1 \\
&\quad + (3m^2n - 10mn + 3n - n^3)c_2] \cos nx \\
&\quad + [(-3m^2n + 10mn + 3n - n^3)c_1 + (5n^2 - 3mn^2 \\
&\quad + m^3 - 5m^2 + 4m)c_2] \sin nx \}
\end{aligned}
\right\} \quad (6.66)$$

由于  $\alpha$  一般很大, 所以上式在计算中可近似地取  $m \approx \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{4}}$ ,  $n = \sqrt{\frac{\alpha}{4}}$ 。

反映外荷载作用下的平衡方程的特解, 是采用薄膜理论来求解, 即用直接的静力平衡方法求出薄膜内力  $N_\theta$ 、 $N_\phi$ 。因为壳体的薄膜内力是与壳厚无关的, 所以可以采用常厚度球壳求薄膜内力的办法来求变厚度球壳的内力  $N_\theta$ 、 $N_\phi$  等。再与式 (6.64) 中对应的内力项相加, 即获得变厚度球壳的内力与变形的全解。

如果中心线半径为  $R$  的变厚度  $h = h_0(1 + \beta\phi)^2$  球壳, 承受均匀法向正压力  $q$  作用, 其在  $\phi = \phi_1$  处的边缘有固定约束, 这种球壳的内力也可类比于常厚度球壳采用二次超静定的力法求解。解除球壳边缘的固定约束, 代之以未知的水平推力  $H$  和径向弯矩  $M$ 。建立一个二次超静定力法方程, 从而解出  $H$  和  $M$ , 也就可依据式 (6.66) 确定出  $c_1$  和  $c_2$  常数, 随之获得变厚度球壳的其他内力和变形。

也可采用以下办法确定式 (6.65) 中的  $c_1$  与  $c_2$  积分常数: 第一步, 设  $w$  为球壳中面法向位移,  $v$  为中面径向位移, 按球壳在均匀法向荷载  $q$  作用下的薄膜理论, 其径向转角  $\psi$  为

$$\psi = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} - v \right) \quad (6.67)$$

由于球壳的薄膜理论中只有顺剪力  $N_\theta$  与  $N_\phi$ , 按物理关系有

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} + w = \frac{R}{Eh_0(1 + \beta\phi)^2} (N_\theta - \mu N_\phi) \quad (6.68)$$

$$w + v \operatorname{ctg} \phi = \frac{R}{Eh_0(1 + \beta\phi)^2} (N_\phi - \mu N_\theta) \quad (6.69)$$

将上面式 (6.69) 对  $\phi$  求导数, 得

$$\frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \operatorname{ctg} \phi - v \operatorname{csc}^2 \phi = -\frac{2R}{Eh_0} (N_\theta - \mu N_\phi) (1 + \beta\phi)^{-3} \beta \quad (6.70)$$

将式(6.69)减去式(6.68),得

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} - v \operatorname{ctg} \phi = \frac{R(1+\mu)}{Eh_0(1+\beta\phi)^2}(N_s - N_\theta) \quad (6.71)$$

将式(6.70)减去式(6.71)乘以  $\operatorname{ctg} \phi$  之后,得出用内力表达的  $\psi'$ ,为

$$\psi' = - \left[ \frac{2\beta(N_\theta - \mu N_s)}{Eh_0(1+\beta\phi)^3} + \frac{(1+\mu)\operatorname{ctg} \phi}{Eh_0(1+\beta\phi)^2}(N_s - N_\theta) \right] \quad (6.72)$$

对通常的钢筋混凝土结构,可以近似地取  $\mu=0$ ,那么在式(6.72)中代入薄膜内力  $N_s$  及  $N_\theta$  后,  $\psi'$  为

$$\psi' = \frac{\beta q_n R}{Eh_0(1+\beta\phi)^2} \quad (6.73)$$

相应的水平位移  $\Delta H'$  为

$$\Delta H' = \frac{-q_n R^2}{2Eh_0(1+\beta\phi)^2} \quad (6.74)$$

第二步,按边缘有矩理论求出变厚度球壳的  $\psi$  及  $\Delta H$ ,它们由式(6.66)可以解出。如果引入符号

$$I = m^2 - m - n^2 \quad J = n(2m - 1)$$

同样近似地取  $\mu=0$ ,并求在  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$  时的解,为

$$\begin{aligned} \psi &= - \frac{\beta^2 e^{(m-4)x}}{Eh_0} \\ &\quad [ (I \cos nx - J \sin nx) c_1 + (I \sin nx + J \cos nx) c_2 ] \\ \Delta H &= - \frac{\beta^2 e^{(m-1)x}}{Eh_0(1+\beta\phi)^2} \\ &\quad [ m(\sin nx + \cos nx) c_1 - n(\sin nx - \cos nx) c_2 ] \end{aligned}$$

如果边界  $\phi=\phi_1=\frac{\pi}{2}$  是固定的,则二次力法方程为

$$\left. \begin{aligned} \psi + \psi' &= 0 \\ \Delta H + \Delta H' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

将以上各表达式代入式(6.75)中,可以求出待定常数  $c_1$  与  $c_2$ ,并进而得出各有矩内力。各有矩内力与  $q_n$  单独作用变厚度球壳的薄膜内力  $N_s, N_\theta$  相加,即为在  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$  边缘固定时,正压力  $q_n$  作用下变厚度球壳的全解。

计算结果表明,边缘有矩内力对球壳的影响是局部的,它在边缘附近呈现急剧衰减变化,这些与常厚度球壳是相同的。但底部壳厚的增大导致了弯矩的增加,厚度的变化使内力的衰减幅度加大。例如在  $h_0=8\text{cm}$ ,  $\beta=0.2$ , 承受  $q_n=10\text{kN/m}^2$  法向荷载时,常厚度球壳在  $\phi_1=\frac{\pi}{2}$  的底部弯矩为  $0.24\text{kN} \cdot \text{m/m}$ , 而变厚度球壳的底

部弯矩为  $0.39\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$ 。因此计算表明,变厚度球壳对壳结构的抗裂有作用,对抗弯设计无明显效果。这一点在其他变厚度旋转壳结构中也有类似表征,请结构设计时注意。

变厚度球壳的有矩内力从边缘衰减的过程如图 6.12 所示,其中参数为球壳半径  $R=150\text{cm}$ ,  $\beta=-0.25$ ,  $h_0=16.5\text{cm}$ 。

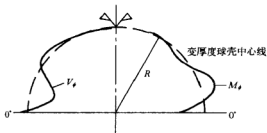


图 6.12 变厚度球壳内力变化

## 6.6 变厚度圆锥壳结构<sup>1)</sup>

圆锥壳是另一种旋转壳结构,它是由一条与旋转轴相交的直线旋转一周而形成的几何形状,计入壳体的厚度  $h$  之后,成为圆锥壳。

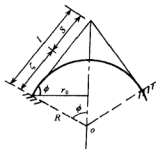


图 6.13 圆锥壳结构

用传统的方法分析圆锥壳结构时,考虑圆锥壳特征  $r_1=\infty$ ,而角度  $\phi$  为一常量,因此以  $\phi$  为坐标变量在锥壳里是不合适的,这时应选取从锥壳顶量出的距离  $s$  来表示任一点的径向位置,如图 6.13 所示。显然有  $r_2=s\text{ctg}\phi$ ,  $ds=r_1d\phi$ ,这样在锥壳中就可将旋转壳的微分方程中的变量  $\phi$  改为  $s$ 。

利用  $r_1=\infty$  简化方程 (6.19)、(6.20),然后将式 (6.19) 中的  $\psi$  用  $V_\phi$  表示,再代入式 (6.20) 中,得出圆锥壳关于  $V_\phi$  的控制方程,为

$$\frac{d^2(sV_\phi)}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d(sV_\phi)}{ds} + \left( -\frac{1}{s^2} \pm \frac{i\lambda^2 \text{tg}\phi}{s} \right) sV_\phi = 0 \quad (6.76)$$

式中,  $\lambda$  对一般旋转壳有

$$\lambda^4 = \frac{Eh}{D} - \frac{\rho^2}{r_1^2}$$

在圆锥壳中,仅取等号右边第一项。

1) 黄智强,贾乃文. 混凝土变壁厚圆柱形贮液结构计算. 工程力学(增刊), 2000 年 9 月

式(6.76)是两个共轭的二阶方程,求解时须引用颇为繁琐的 Bessel 函数和 Hankel 函数,在结构工程等设计和计算时颇为不便。

如图 6.13 所示,圆锥壳在边缘有与之相切的球壳,在边缘处能较好地“拟合”。考虑到旋转壳的有矩效应是从边缘开始急剧衰减的,因此工程上对常厚度圆锥壳的有矩计算,常用与其边缘相切的球壳代替,即边缘处  $r_2=R$  的球壳的有矩内力表示,所以这时的圆锥壳内力为

$$\left. \begin{aligned} V_\theta &= ce^{-\alpha\zeta}\sin(\alpha\zeta + \omega) \\ N_\theta &= -\sqrt{2}cae^{-\alpha\zeta}\sin\left(\alpha\zeta + \omega - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_\phi &= ce^{-\alpha\zeta}\sin(\alpha\zeta + \omega)\operatorname{ctg}\phi \\ M_\theta &= \frac{r_2}{\sqrt{2}a}ce^{-\alpha\zeta}\sin\left(\alpha\zeta + \omega + \frac{\pi}{4}\right) \\ \phi &= -\frac{2a^2}{Eh}ce^{-\alpha\zeta}\sin(\alpha\zeta + \omega) \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

式中,  $c$  与  $\omega$  为待定常数;  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ 。

利用类似于圆柱壳求解的二次力法方程也可以求解圆锥壳的端部约束力。例如如图 6.13 中圆锥壳两端与基础整体连接,圆锥壳同时承受外荷载如壳的法向荷载  $q_n$  及径向荷载  $q_r$  等,解除端部约束之后,代之以未知约束力即径向弯矩  $M$  与水平剪力  $H$ ,这时加上外荷载作用的圆锥壳则成为二次超静定结构,可用力法方程求解  $M$  和  $H$ 。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}M + \delta_{12}H + \Delta_{1q} &= 0 \\ \delta_{21}M + \delta_{22}H + \Delta_{2q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.78)$$

式中,力法方程中的系数  $\delta_{11}$ 、 $\delta_{12}$ 、 $\delta_{21}$ 、 $\delta_{22}$  的含义均同式(6.49),这是因为可借用球壳的端部有矩理论处理圆锥壳端部有矩内力,但要将式(6.49)中各表达式的  $R$  代之以这里的  $r_2$ ,即以  $r_0=R\sin\phi$  来代换,

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{-4a^3\sin\phi}{Ehr_0} \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{2a^2\sin\phi}{Eh} \\ \delta_{22} &= -\frac{2r_0a\sin\phi}{Eh} \end{aligned} \right\} \quad (6.79)$$

式中,  $\phi$  为常量;  $h$  为圆锥壳的常厚度。

如果仅考虑圆锥壳受均匀法向外荷载  $q_n$  作用,则由  $q_n$  引起的式(6.78)中的系数  $\Delta_{1q}$  与  $\Delta_{2q}$  分别为

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{10} &= \frac{2\text{ctg}\phi}{\sin\phi} \frac{q_n r_0}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \\ \Delta_{20} &= -\frac{q_n r_0^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) / \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

将式(6.79)与(6.80)代入式(6.78)中,可以解出圆锥壳底端的约束力——径向弯矩  $M$  与水平剪力  $H$  为

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{q_n r_0^2 \left[ 2\text{ctg}\phi - \alpha \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \right]}{2\alpha^3 \sin^2\phi} \\ H &= -\frac{q_n r_0 (\text{ctg}\phi - \alpha) \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\alpha^2 \sin^2\phi} \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

解出约束力  $M$  和  $H$  之后,此时圆锥壳除受法向均布外荷载  $q_n$  外,还受到壳端的径向弯矩  $M$  与水平剪力  $H$  作用,再利用球壳的公式,求出由  $M$  与  $H$  导致的圆锥壳的其他内力和变形,利用圆锥壳的薄膜理论计算由  $q_n$  导致的壳体内力,上述内力的组合即是最终内力。

在结构工程设计中,主要考虑的内力是圆锥壳的径向弯矩  $M_r$  与环向力  $N_\theta$ ,它们为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{r_0 H}{\alpha} e^{-\alpha\zeta} \sin(\alpha\zeta) + \sqrt{2} M e^{-\alpha\zeta} \sin\left(\alpha\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \\ N_\theta &= -2\alpha H \sin\phi e^{-\alpha\zeta} \sin\left(\alpha\zeta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2\sqrt{2} M \alpha^2 \sin\phi}{r_0} e^{-\alpha\zeta} \sin\left(\alpha\zeta - \frac{\pi}{4}\right) + q_n \zeta \text{tg}\phi \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

圆锥壳在轴对称外荷载  $q_n$  作用下的薄膜内力仅有壳体的顺剪力  $N_s$  与  $N_\theta$ ,薄膜理论求内力的方法可以采用截面法,由力的平衡条件解之。如对圆锥壳某一水平截面以上的锥壳,可由外荷载  $q_n$  与径向力平衡,求出  $N_s$ ,再由另一平衡关系

$$N_\theta = q_n r_2 \quad (6.83)$$

解出该截面的  $N_\theta$ 。这是轴对称情况下的解。

下面分析变厚度圆锥壳结构的内力问题。如图 6.13 所示的圆锥壳,其壳厚  $h$  不是常数,而是随坐标  $s$  的增加而增大,即  $h = \beta s$ ,式中的  $\beta$  是变化系数,则可以利用锥壳的几何特征,即  $r_1 = \infty, r_2 = s \text{ctg}\phi$ ,得出轴对称圆锥壳的平衡方程,为

$$\left. \begin{aligned} N_s + s \frac{dN_s}{ds} - N_\theta + s q_n &= 0 \\ V_s + s \frac{dV_s}{ds} - \frac{N_\theta}{\text{ctg}\phi} + s q_n &= 0 \\ M_s + s \frac{dM_s}{ds} - M_\theta - s V_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.84)$$

式中,  $q_r, q_n$  分别为壳体承受的径向与法向外荷载。在求解这一方程组时, 可以先不计  $q_r, q_n$  作用而求方程组的齐次解, 获得壳体的有矩内力, 然后再计算由  $q_r, q_n$  作用下壳体的薄膜理论内力解, 即式(6.84)非齐次方程的特解, 两者相加即是这一方程组的全解。

设  $w$  为圆锥壳的法向位移, 考虑锥壳的厚度是变化的, 引入轴对称圆锥壳的物理关系式, 为

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{Eh(s)}{1-\mu^2}(\epsilon_r + \mu\epsilon_\theta) & N_\theta &= \frac{Eh(s)}{1-\mu^2}(\epsilon_\theta + \mu\epsilon_r) \\ M_r &= D(s)(\mathcal{H}_r + \mu\mathcal{H}_\theta) & M_\theta &= D(s)(\mathcal{H}_\theta + \mu\mathcal{H}_r) \end{aligned} \right\} \quad (6.85)$$

式中,  $D(s) = \frac{E\beta^3 s^3}{12(1-\mu^2)}$ ;  $\mathcal{H}_r = \frac{d^2 w}{ds^2}$ ;  $\mathcal{H}_\theta = -\frac{1}{s} \frac{dw}{ds}$ 。

如取式(6.84)的齐次方程, 则由其中第二式推出

$$N_\theta = \text{ctg}\phi \frac{d(sV_r)}{ds}$$

将这一结果代入其中第一式, 积分并令积分常数为零, 则有

$$N_r = \text{ctg}\phi V_r$$

这里令积分常数为零是不会影响内力的最后结果的。

在轴对称荷载下, 圆锥壳除有法向位移  $w$  之外, 还有径向位移  $u$ , 应变与位移的几何关系为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial s} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{s} + \frac{\tau w}{s \text{ctg}\phi} \\ \psi &= \frac{d\tau w}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

由此可建立变形协调方程, 为

$$\frac{d(s\epsilon_\theta)}{ds} - \epsilon_r = -\frac{\psi}{\text{ctg}\phi} \quad (6.87)$$

将式(6.85)中的物理关系式  $N_r, N_\theta$  表示为  $\epsilon_r$  与  $\epsilon_\theta$  之后, 代入  $N_\theta, N_r$  用  $V_r$  表示的式子, 再代入式(6.87)中, 由此得出新的协调方程, 为

$$\frac{\text{ctg}^2\phi}{E\beta s} \left[ s \frac{d^2(sV_r)}{ds^2} + (\mu-1)V_r \right] = -\psi \quad (6.88)$$

这是变厚度圆锥壳内力分析的控制方程之一。变厚度圆锥壳内力分析的另一控制方程是方程(6.62)中的第二式, 按变厚度展开, 得出

$$s \frac{d^2\psi}{ds^2} + 4 \frac{d\psi}{ds} + \frac{3\mu-1}{s} \psi = \frac{sV_r}{D} \quad (6.89)$$

显然, 式(6.88)与式(6.89)是关于内力  $V_r$  及转角  $\psi$  的两个混合形方程, 将式(6.88)中的  $\psi$  代入式(6.89)中, 得出关于  $V_r$  的方程, 为

$$s^4 \frac{d(sV_s)}{ds^4} + 4s^3 \frac{d^3(sV_s)}{ds^3} + (4\mu - 2)s^2 \frac{d^2(sV_s)}{ds^2} + ksV_s = 0 \quad (6.90)$$

式中,  $k = 3(\mu - 1)^2 + \frac{12(1 - \mu^2)}{\beta^2 \text{tg}^2 \phi}$ 。

方程(6.88)是一个可以化为常系数微分方程的 Euler 形方程,由此方程解出的变厚度圆锥壳的内力与变形等都是精确的。

在求解微分方程(6.90)时,引入变量  $x$ , 并且有  $s = e^x$ , 则  $x = \ln s$ 。利用微分关系, 将式(6.90)化为关于  $x$  为变量的函数, 即  $sV_s$  的常系数微分方程, 它的特征方程用  $\gamma$  表示成

$$\gamma(\gamma - 1)[\gamma(\gamma - 1) + 4(\mu - 1)] + k = 0$$

由此解出特征值为

$$\gamma_{1,2,3,4} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + 2[-4(\mu - 1) \pm \sqrt{16(\mu - 1)^2 - 4k}]} \right\}$$

这是一个复数,经计算可得出两组共轭的特征值,为

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + m) \pm in = m_1 + in$$

$$\gamma_{3,4} = \frac{1}{2}(1 - m) \pm in = m_2 \pm in$$

式中

$$m = \sqrt{\frac{1}{2} \{ [1 - 8(\mu - 1)] + \sqrt{[1 - 8(\mu - 1)]^2 + 4[4k - 16(\mu - 1)^2]} \}}$$

$$n = \frac{1}{2m} \sqrt{4k - 16(\mu - 1)^2}$$

由于特征值是共轭的复数,因此按微分方程理论,函数  $sV_s$  可以表达成

$$sV_s = e^{m_1 x} (A \cos nx + B \sin nx) + e^{m_2 x} (C \cos nx + D \sin nx) \quad (6.91)$$

式中,  $A, B, C, D$  分别为积分常数,它们可由圆锥壳的边缘内力条件或位移约束条件确定。

在式(6.91)中的  $m_1$  与  $m_2$  均包含有  $k$ , 这是一个很大的数,所以由它构成的  $m \gg 1$ , 故一般情况下  $m_1 > 0, m_2 < 0$ 。按壳体结构的边缘效应,式(6.91)中等号右边第一部分是随坐标  $s$  的减少而衰减,而第二部分是随  $s$  坐标增加而衰减,因而在锥壳顶不开孔,或仅计算其下部端部有矩内力时,仅取式(6.91)中等号右边第一部分,规律性地可写成

$$V_s = A e^{(m_1 - 1)x} \sin(nx + \omega) \quad (6.92)$$

式中,  $A, \omega$  分别为两个待定常数。

由式(6.92),再利用内力之间微分关系,可以求出变厚度圆锥壳的其他内力,这里主要给出结构设计的主要内力  $N_\theta$  及  $M_r$ , 即



$$N_\theta = -\frac{dV_s}{ds} = -Ae^{(m_1-2)x}[(m_1-1)\sin(nx+\omega) + n\cos(nx+\omega)] \quad (6.93)$$

$$M_s = -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)r_2} \frac{d^3V_s}{ds^3} = -\frac{\beta^2 A}{12(1-\mu^2)r_2^2} e^{(m_1-4)x} \\ \{[(m_1-1)(m_1-2)(m_1-3) - n^2(3m_1-6)]\sin(nx+\omega) \\ - [n(2m_1-3)(m_1-3) + n(m_1-1)(m_1-2) - n^3]\cos(nx+\omega)\} \quad (6.94)$$

在应用以上各式进行内力计算时,要注意将待求坐标  $s$ , 由  $x=\ln s$  公式求出  $x$  值, 再代入以上各式计算内力。

以上的内力是式(6.84)的齐次方程的解。作为变厚度圆锥壳的方程(6.84)的全解,还要进一步考虑在外荷载  $q_s$  及  $q$  作用下的圆锥壳薄膜理论的解。这一解是通过截面法内力的平衡条件求出  $N_s$ ,再由  $N_\theta=q_s r_2$  求出轴对称条件下的另一薄膜内力  $N_\theta$ ,然后将它们加到齐次解中去。

通常对混凝土结构取  $\mu=0$ ,以上各式中的  $m$  和  $n$  可简化为

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}\{9 + \sqrt{9^2 + 4(4k-16)}\}} \\ n = \frac{1}{2m} \sqrt{4k-16}$$

用变厚度圆锥壳理论可以比较好地求解如图 6.14 所示的变厚度圆柱形箱问题。这是一个多年来许多结构研究者颇感兴趣的难以简单求解的问题,如按圆柱壳理论,考虑壳厚是线性变化的,即有  $h=\beta x$ ,则圆柱壳的抗弯刚度  $D$  不再是常数,而是

$$D = \frac{E\beta^3 x^3}{12(1-\mu^2)}$$

式中,  $x$  与  $s$  有差别,  $x$  为按柱壳坐标给出的竖向垂直距离;  $s$  为按变厚度中心线给出的斜向距离。

如果用  $w$  表示圆柱壳的挠度变形,在法向外荷载  $q$  作用下轴对称圆柱壳的挠度方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} w = q \quad (6.95)$$

式中,  $R$  为圆柱壳半径。

如果圆柱壳是贮水结构,那么水压外荷载  $q=\gamma(x-x_0)$ , 式中  $\gamma$  为水重度,  $x_0$  为坐标原点到水面的距离,这样式(6.95)成为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\mu^2)}{\beta^2 R^2} xw = \frac{12(1-\mu^2)}{E\beta^3} \gamma(x-x_0)$$

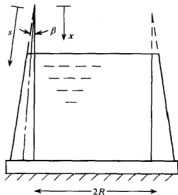


图 6.14 变厚度圆柱形箱

这一方程的齐次方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\mu^2)}{\beta^2 R^2} x w = 0 \quad (6.96)$$

引入算符

$$L(w) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dw}{dx} \right)$$

令

$$k^4 = \frac{12(1-\mu^2)}{\beta^2 R^2}$$

则式(6.96)可以简单表示为

$$L[L(w)] + k^4 w = 0$$

上式可以化为以下两个共轭的二阶微分方程:

$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + 2 \frac{dw}{dx} \pm i k^2 w = 0 \quad (6.97)$$

引入新的变量  $\eta$  和  $\zeta$ , 并有

$$\eta = 2k \sqrt{ix} \quad \zeta = w \sqrt{x}$$

则式(6.97)的第一式可表示成 Bessel 方程, 即

$$\eta^2 \frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} + \eta \frac{d\zeta}{d\eta} + (\eta^2 - 1)\zeta = 0 \quad (6.98)$$

类似地也可将式(6.97)中第二式表示成另一种 Bessel 方程。显然求解这一类 Bessel 方程是颇为繁琐的, 因为 Bessel 函数和 Hankel 函数是表达复杂的无穷级数, 不便于工程结构的设计与计算。

实际上, 如图 6.14 所示的变壁厚箱中的内壁是与轴线平行的, 外壁则是线性变化的。如果从壁厚的中心线来看, 显然是锥度为  $\frac{\beta}{2}$  的线性变厚度圆锥壳, 因此可用本节中线性变厚度锥壳方程来求解图 6.14 的变壁厚箱问题, 其内力解可表达成

$$V_s = A e^{(m_1-1)x} \sin(nx + \omega)$$

以及由它的导数求出的  $N_s, M_s$  等。在  $m$  及  $n$  的表达式中对  $k$  还可进一步简化, 因为这里的  $\beta$  角度很小, 故在混凝土  $\mu=0$ , 并  $\text{ctg}\beta \approx \text{tg} \frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2}$  时

$$k \approx \frac{48}{\beta^4}$$

这样可以方便地求出  $m_1, m_2$  及  $n$  等, 以简化方程(6.98)。

计算表明, 在  $\beta$  很小时例如  $\beta=0.01$  时, 结构呈明显的锥壳特征, 随着  $\beta$  增大,  $k$  减小, 结构趋于常厚度圆柱壳的计算结果。

## 6.7 旋转壳结构的优化设计<sup>1)</sup>

本节对圆柱壳等非负高斯曲率旋转壳结构的结构设计中的优化问题进行讨论。

旋转壳结构的优化设计,又分为形状优化、壳壁厚优化及壳结构整体优化等。

旋转壳结构的形状优化,是指在满足一定约束条件下,使目标函数取极值。例如在容积一定时,达到周边面积最小、材料最省的优化。这是一个有约束的非线性规划问题,可以采用拉格朗日乘子法实现优化设计。

具体方法是:设函数  $y=f(x_i)$  ( $i=1,2,\cdots,n$ ) 满足等式约束条件  $g_j(x_i)=0$  ( $i=1,2,\cdots,n$ ) ( $j=1,2,\cdots,m$ )。引入拉格朗日待定乘子  $\lambda_j$ ,将约束极值问题转化为新函数的无约束极值问题。取新函数  $z(x_i)$ ,并且表示为

$$z(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (6.99)$$

取  $z$  函数的极值必要条件为

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)(j=1,2,\cdots,m)$$

解此  $(n+m)$  方程,获得总计  $(n+m)$  关于变量  $x_i$  和  $\lambda_j$  的值,从而获得优化设计。

**算例 6.2** 圆柱形贮液贮仓结构,直径为  $D$ ,高度为  $H$ ,进行结构形状优化,要求容积  $V$  一定时,周边面积  $S$  最小。

**解** 考虑圆柱形贮液贮仓结构是包括底面积在内的,故其容积  $V$  为

$$V = \frac{1}{4}\pi D^2 H$$

包括底面积在内的周边面积  $S$  为

$$S = \pi D H + \frac{1}{4}\pi D^2$$

引入新函数  $z$ ,表达式为

$$z = \pi D H + \frac{1}{4}\pi D^2 + \lambda \left( \frac{1}{4}\pi D^2 H - A \right)$$

式中的  $A$  是体积  $V$  等于常数  $A$  的条件。按极值条件求得方程式如下:

$$\frac{\partial z}{\partial D} = \pi H + \frac{1}{2}\pi D + \frac{1}{2}\lambda \pi D H = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial H} = \pi D + \frac{1}{4}\lambda \pi D^2 = 0$$

1) 贾乃文等. 旋转壳特种结构的优化设计. 建筑技术开发, 1996 年 4 期

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} = \frac{1}{4} \pi D^2 H - A = 0$$

由此解出

$$H = \frac{1}{2} D \quad D = \sqrt[3]{\frac{8A}{\pi}}$$

即为圆柱形结构最优外形设计。

由旋转壳构成的各种高耸结构,采用变壁厚结构形式是经济的。壁厚的优化设计往往采用满应力设计,即在同一高度上的相同内力,采用同样壁厚;不同高度上内力不同,壳壁厚也不同,但都满足材料的极限应力。

壳壁厚控制设计的主要内力是径向弯矩和环向力,表现为壳单元体的两个方向的拉(压)应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ ,而壳的外力给出的正压力与这两个应力相比很小,可以略去。满应力设计的极限应力取  $\sigma_t$ ,由 Tresca 屈服条件可得

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t \quad (6.100)$$

$\sigma_t$  可取混凝土的抗拉设计强度  $f_t$ 。

在进行壳壁厚的满应力优化时,将壳的高度分成若干段,如分别用  $N_i$ 、 $M_i$  表示第  $i$  段的环向力和径向弯矩,以  $A_i$  和  $W_i$  表示第  $i$  段的单位周长的截面面积和抵抗矩,用  $h_i$  表示第  $i$  段壁厚。其破坏应力表达式为

$$\sigma_i = \frac{N_i}{h_i} + \frac{M_i}{W_i} = \sigma_t = f_t \quad (6.101)$$

壳壁厚的优化设计可采用收敛比较快的浮动应力指数应力比方法,即用  $h_i$  表示设计变量。在第  $j$  次迭代中,设计变量与应力之间的关系为

$$\frac{h_i^{j+1}}{h_i^j} = \left( \frac{\sigma_i^j}{\sigma_i^{j+1}} \right)^{\beta_i} \quad (6.102)$$

式中,  $\beta_i$  为应力指数,它与内力及设计变量有关,其表达式为

$$\beta_i = \frac{\ln \left[ \frac{h_i^{j+1}}{h_i^j} \right]}{\ln \left[ \frac{\sigma_i^j}{\sigma_i^{j+1}} \right]} \quad (6.103)$$

在迭代过程中,每一新的设计变量  $h_i^{j+1}$  的表达式为

$$h_i^{j+1} = h_i^j \left( \frac{\sigma_i^j}{f_t} \right)^{\beta_i} \quad (6.104)$$

在迭代开始时,先经验地确定第  $i$  段一个仓壁的厚度  $h_i^0$ ,或者从构造要求定出  $h_i^0$ ,并由此算出该段最大环向力和径向弯矩值,再求出应力最大值  $\sigma_i$ 。第一次迭代时取  $h_i^1 = h_i^0 + \Delta h_i$ ,  $\Delta h_i$  表示一个小量,依次由以上公式分别计算  $\sigma_i^j$  及  $\beta_i$ ,获得  $h_i$  的下一修正值。依次迭代循环,直至  $\sigma_i$  与  $f_t$  接近并满足预定的误差要求为止。

按此方法计算 20m 高贮仓圆柱壳壁厚,其壁厚是非线性变化的,如图 6.15 所示。壁厚最大点约距底部 5m 左右。实际在工程设计时,壳顶处至少要 12~15cm,

另外在仓下部 12m 范围内,根据实际需要要另外乘以一个大于 1 的附加壁厚系数。

对旋转壳结构进行整体优化设计。选择结构总造价目标函数  $F$  为

$$F = k_1 W_s + k_2 W_c \quad (6.105)$$

式中,  $k_1$ 、 $k_2$  分别为钢筋与混凝土价格系数;  $W_s$  和  $W_c$  分别为壳结构钢筋和混凝土总用量。对旋转壳结构几何分析可知

$$ds = r_1 d\phi$$

$$r = r_2 \sin\phi$$

如果主要取壳的薄膜内力进行结构分析,用  $N_1$ 、 $N_2$  分别代表壳体径向和环向内力,以  $P$  表示水平平行圆  $r$  以上的总竖向荷载,  $q_n$  为壳的法向压力,则有

$$\left. \begin{aligned} 2\pi r N_1 \sin\phi &= P \\ \frac{N_1}{r_1} + \frac{N_2}{r_2} &= q_n \end{aligned} \right\} \quad (6.106)$$

显然环向钢筋总量、壳体混凝土用量、纵向钢筋总量等都与幅角  $\phi$  有关,是  $\phi$  的非线性函数,  $F$  一般地可表示为

$$F = k_1 \int_{\phi_0}^{\phi_1} \gamma_2 \frac{N_2 2\pi r}{f_c \sin\phi} r_1 d\phi + (k_2 + \mu k_1) \int_{\phi_0}^{\phi_1} \gamma_1 h \frac{2\pi r}{\sin\phi} r_1 d\phi \quad (6.107)$$

式中,  $\gamma_1$ 、 $h$  分别为混凝土相对密度和壳厚;  $\gamma_2$  为钢筋相对密度;  $\mu$  为纵向钢筋配筋率。

现给出该结构设计的一些约束条件。例如,1) 对总容积的要求。2) 上部开口处由于工艺要求应满足水平平行圆半径要求。3) 下部与地基连接处的幅角  $\phi_1$  要求等。这就出现了至少两个变量的非线性规划问题,应当采用罚函数法对其求解。罚函数法是将有约束的非线性规划通过罚因子的选择,将其变成一系列求罚函数极小值问题,通过计算机实现优化解答。

在给出结构目标函数式和约束条件情况下,即可给出结构优化设计的等值线与可行域。如果  $X^*$  为最优解,对目标函数  $f(X)$ ,罚函数方法是在可行域内逐步迭代,引入  $r_k$  为第  $K$  次迭代罚因子,罚函数为

$$P(X, r_k) = F(X) + r_k \sum_{i=1}^n \frac{1}{g_i(X)} \quad (6.108)$$

式中,  $g_i(X)$  为约束条件。罚函数法迭代过程如下:

1) 设初始可行点  $X_0$  满足所有严格不等式约束条件  $g_i(X_0) \geq 0$ , 选择罚因子初始值  $r_1 > 0$ 。

2) 应用任何一种无约束极小化方法求  $P(X, r_k)$  的极小值,并得到第  $K$  步迭

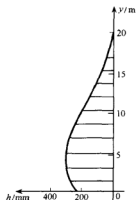


图 6.15 20m 高贮  
仓壁厚优化

代最优解。

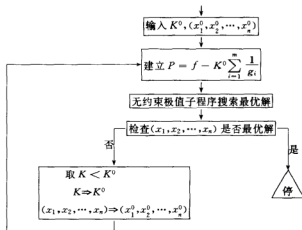
3) 检验这个最优解  $X_K$  是否是原问题的最优解,若是,则迭代终止;否则转下一步。

4) 令  $\frac{r_K+1}{r_K} = c < 1$ ,  $c$  为步长,可取 0.1 或 0.2 等。

5) 令  $K=K+1$ ,取  $X_0=X_K$ ,转第二步,收敛判据为  $\|X_K - X_{K+1}\| \leq \epsilon$ 。

用这一罚函数方法,可求解卵形消化池的优化设计方案,获得比较经济的设计数据。

罚函数内点法优化设计的框图如下:



现以如图 6.16 所示的卵形消化池旋转壳结构说明用罚函数法进行旋转壳一般结构的优化设计过程。

卵形消化池这种结构,具有表面积小、热损失少等优点。它也是旋转壳结构,只是它的旋轴不在圆心处,而是与圆心存在距离  $a$ 。现设圆半径为  $R$ ,开口处的幅角为  $\phi_0$ ,卵形消化池优化设计即计入结构自重及液压引起的壳体内力,合理选择  $\phi_0$  及  $a$  值,达到重量最轻、造价最低的结构优化(也可选择半径  $R$  作为设计变量)。

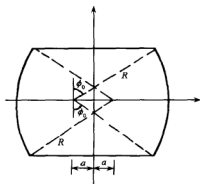


图 6.16 卵形消化池

分别以  $N_r$  与  $N_\theta$  表示卵形壳体的径向薄膜内力 and 环向薄膜内力,按荷载轴对称考虑,没有薄膜内力  $N_{\phi\theta}$  项。由于以结构总造价为目标函数时,壳底的有矩效应影响很小,所以可以略去。以  $q_n$  及  $P$  表示任意点的法向荷载及任意截面处的总的竖向荷载,则必有

$$\frac{N_s}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = q_n \quad (6.109)$$

$$N_s(\sin\phi)2\pi r_0 = P \quad (6.110)$$

式中,  $r_1=r_2=R$ ,  $r_0=R\sin\phi-a_0$ 。

以  $\gamma$  表示钢筋混凝土材料重度,  $\gamma_1$  表示池内液体重度,  $\gamma_2$  表示钢筋材料重度, 则  $q_n$  为

$$q_n = \gamma \cos\phi - (\cos\phi_0 - \cos\phi)R\gamma_1$$

由式(6.109)和式(6.110)可以求出  $N_s$  与  $N_\theta$ , 其中计算出的  $N_s$  为压力,  $N_\theta$  为环拉力。结构设计时  $N_s$  是按构造配置钢筋, 故不列入约束条件, 而由  $N_\theta$  计算出  $S$  弧长段所配钢筋量为

$$A_s = \frac{N_\theta S}{f_y} \quad (6.111)$$

这个结构优化设计的目标函数为结构的总造价, 为

$$W = k_1 W_s + k_2 W_c \quad (6.112)$$

式中,  $k_1$  为钢筋单位造价;  $W_s$  为钢筋总量;  $k_2$  为混凝土单位造价;  $W_c$  为混凝土总量。

优化设计该卵形池的设计变量取图中的  $a$  与  $\phi_0$  以及池壁厚  $h$ 。

因为旋转壳的周围表面积均为平行圆半径  $r_0$  的非线性函数, 所以卵形消化池的最优设计也属有约束条件的非线性规划问题, 可用罚函数法处理。

优化设计消化池的一般约束条件可取为

- 1) 结构即消化池的总容量为给定的某大于零的值。
- 2) 引入变量  $x = \frac{a}{R}$ , 并有  $x > 0$ 。
- 3) 池壁厚度按构造要求为某大于零的值, 或按壁底受压要求给出的厚度。
- 4) 壁底水平平行圆半径  $R(\sin\phi_0) - x$  等于给定常数的等式约束或者不等式约束。

**算例 6.3** 设计  $4000\text{m}^3$  容量的卵形消化池, 壁厚  $h=30\text{cm}$ , 选择半径  $R=10\text{m}$  时进行最优设计, 其目标函数取最小, 即

$$\begin{aligned} W(a, \phi_0, h) = & \frac{2\pi\alpha_1\gamma_2 R}{f_y} \int_{\phi_0}^{\pi-\phi_0} \frac{(R\sin\phi - a)}{\sin\phi} N_\theta d\phi \\ & + (\alpha_1 + \mu\alpha_2) \int_{\phi_0}^{\pi-\phi_0} \frac{2\pi\gamma_1 h R}{\sin\phi} (R\sin\phi - a) d\phi \rightarrow \min \end{aligned}$$

约束条件为

$$1) \pi R^3 \int_{\phi_0}^{\pi-\phi_0} (\sin\phi - x)^2 \sin\phi d\phi = 4000.$$

$$2) x = \frac{a}{R} > 0.$$

$$3) h \geq 0.3.$$

$$4) R(\sin\phi_0) - x = c_0.$$

利用以上罚函数法进行优化设计, 所得结果为

$$x = \frac{a}{R} = 0.4 \quad \phi_0 = 55.6^\circ$$

类似地可以进行其他卵形消化池的优化设计或者其他旋转壳结构的优化设计。

## 6.8 旋转壳结构的塑性极限分析

本节仅限于分析夹层壳结构的塑性极限分析。所谓夹层壳是指壳体厚度分成两部分, 其中有  $2h$  的夹心层和厚度为  $H$  的上下两个表面薄层。在夹层壳体结构中, 可以认为上、下两个表层能够承受拉力和压力, 并且认为应力沿表层厚度无变化, 而夹心层只起维持上、下表层间距的作用, 不承担任何拉压力。如果令  $\sigma_\theta^+$  与  $\sigma_\phi^+$  为上表层在  $\theta$  和  $\phi$  方向的应力;  $\sigma_\theta^-$  和  $\sigma_\phi^-$  为下表层在  $\theta$  和  $\phi$  方向的应力, 这时有

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= H(\sigma_\theta^+ + \sigma_\theta^-) & N_\phi &= H(\sigma_\phi^+ + \sigma_\phi^-) \\ M_\theta &= hH(\sigma_\theta^- - \sigma_\theta^+) & M_\phi &= hH(\sigma_\phi^- - \sigma_\phi^+) \end{aligned} \right\} \quad (6.113)$$

如果材料的应力达到塑性屈服应力  $\sigma_s$ , 则有  $M_i = 2hH\sigma_s$ ,  $N_i = 2H\sigma_s$ , 引入无量纲量

$$\left. \begin{aligned} n_\theta &= \frac{N_\theta}{N_i} & n_\phi &= \frac{N_\phi}{N_i} \\ m_\theta &= \frac{M_\theta}{M_i} & m_\phi &= \frac{M_\phi}{M_i} \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

则由式(6.113)可解出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^+ &= \sigma_s(n_\theta - m_\theta) & \sigma_\phi^+ &= \sigma_s(n_\phi - m_\phi) \\ \sigma_\theta^- &= \sigma_s(n_\theta + m_\theta) & \sigma_\phi^- &= \sigma_s(n_\phi + m_\phi) \end{aligned} \right\} \quad (6.115)$$

引用 Tresca 屈服准则式

$$\max(|\sigma_\theta|, |\sigma_\phi|, |\sigma_\theta - \sigma_\phi|) \leq \sigma_s$$

式(6.115)必须在夹层壳中的上层和下层都得到满足, 即条件展开式为

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\sigma_\theta^+}{\sigma_s} \right| &= |n_\theta - m_\theta| \leq 1 \\ \left| \frac{\sigma_\theta^-}{\sigma_s} \right| &= |n_\theta + m_\theta| \leq 1 \\ \left| \frac{\sigma_\phi^+}{\sigma_s} \right| &= |n_\phi - m_\phi| \leq 1 \\ \left| \frac{\sigma_\phi^-}{\sigma_s} \right| &= |n_\phi + m_\phi| \leq 1 \\ \left| \frac{\sigma_\theta^+ - \sigma_\phi^+}{\sigma_s} \right| &= |n_\theta - m_\theta - n_\phi + m_\phi| \leq 1 \\ \left| \frac{\sigma_\theta^- - \sigma_\phi^-}{\sigma_s} \right| &= |n_\theta + m_\theta - n_\phi - m_\phi| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.116)$$



由此可知,利用 Tresca 屈服准则来分析夹层壳结构,即要处理式(6.116)中的 12 个线性方程式。

在工程实际中,弯矩和薄膜力并不总是同时起主要作用的。例如均匀受压作用的球壳,其壳体的大部分区域呈现薄膜内力即顺剪力作用,仅在边界约束区域附近才主要表现为矩内力,因此在进行壳结构极限分析时,当弯矩起主要作用时,可忽略薄膜内力对结构进入塑性的影响;当薄膜内力起主要作用时,可忽略弯矩对结构进入塑性的影响。这样就出现了双矩弱作用的极限条件,式(6.116)的 12 个方程仅考虑弯矩与弯矩之间关系以及薄膜内力与薄膜内力之间的关系,不再考虑弯矩与薄膜内力之间的关系。

在某些特殊问题中,有时可进而忽略  $m_\theta$  的作用。例如半径为  $a$  的圆柱壳结构,由于  $r_1 = \infty$ ,虽然  $m_\theta$  不等于零,但它在结构发生塑性变形时,没有塑性耗散功率。这样的极限条件称之为单矩作用的极限条件。

下面用 Tresca 屈服准则求解圆柱夹层壳的塑性极限问题(设圆柱壳长为  $2c$ )。

在圆柱壳没有轴向力时,Tresca 极限条件为

$$|m_x| = 1 \quad \left| n_\theta + \frac{m_x}{2} \right| = 1 \quad \left| n_\theta - \frac{m_x}{2} \right| = 1 \quad (6.117)$$

无量纲广义应变为

$$\dot{\epsilon}_\theta = \dot{w} \quad \dot{k}_x = \pm \frac{\dot{w}''}{2c^2} \quad (6.118)$$

若取式(6.117)中第一式作为极限条件,则由应变率向量表达式可得

$$\left. \begin{aligned} f &= m_x - 1 \\ \dot{k}_x &= \gamma \frac{\partial f}{\partial m_x} = \pm \frac{\dot{w}''}{2c^2} = \gamma \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \dot{w} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$

式中,  $\gamma$  是根据与 Tresca 相关联的流动法则而设立的,它将在两个极限面的相交棱线上,表达应变率向量介于这两个极限面的法线之间的某一种线性表达的应变率。

这时再由式(6.117)中第二、三式可知

$$-\frac{1}{2} \leq n_\theta \leq \frac{1}{2} \quad (6.120)$$

若取式(6.117)中第二、第三式作为极限条件,则由塑性流动法则得

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_x &= \pm \frac{\dot{w}''}{2c^2} = \gamma \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \pm 2\gamma = \dot{w} \\ \frac{1}{2} &\leq n_\theta \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.121)$$

上式中  $n_\theta$  不等式的推导如下:由式(6.117)中第二式得出

$$2n_\theta + m_x \leq 2$$

$$m_x \leq 2 - 2n_\theta$$

再由式(6.117)第一式得

$$m_x \leq 1$$

即有

$$2 - 2n_\theta \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq n_\theta$$

再由式(6.117)中第三式推出

$$n_\theta \leq 1$$

故形成式(6.121)中第三式。

由于  $\dot{w}'' \neq 0$ , 但  $\dot{w} = 0$  的情况不存在, 可知取  $m_x = \pm 1$  时不可能出现塑性流动, 故不取式(6.119)的情况作为极限条件, 而由式(6.121)得

$$\frac{1}{2c^2} \frac{\dot{w}''}{\dot{w}} = \pm \frac{1}{2}$$

其解为三角函数式或双曲函数式, 即

$$\dot{w} = A \sin cx + B \cos cx \quad (6.122)$$

或者

$$\dot{w} = A \sinh cx + B \cosh cx \quad (6.123)$$

当应力状态达到

$$n_\theta = \pm \frac{1}{2} \quad m_x = \pm 1$$

时, 应当同时有  $\dot{w}' \neq 0$ , 这时将形成塑性铰圆。

将应力方程  $m_x = 2n_\theta - 2$  代入轴对称圆柱壳结构的平衡方程, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_x}{dx} + q_x &= 0 \\ N_\theta + \frac{dV_x}{dx} + q_x a &= 0 \\ \frac{dM_x}{dx} - V_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.124)$$

式中,  $x$  为圆柱壳的壳长方向;  $\theta, n$  分别为环向和法向方向;  $a$  为圆柱壳平行圆半径。

这一方程的无量纲式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_x}{dx} + q &= 0 \\ \frac{dV_x}{dx} + n_\theta + p &= 0 \\ \lambda \frac{dm_x}{dx} - V_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.125)$$

式中,  $\lambda = \frac{M_2}{a N_2}$ 。

将极限条件  $m_x = 2n_\theta - 2$  代入以上平衡方程后, 可得微分方程

$$n''_\theta - c^2(n_\theta - q_n) = 0$$

上式中如  $q_n$  为常数时, 可改为

$$(n_\theta - q_n)'' + c^2(n_\theta - q_n) = 0$$

解出上式为

$$(n_\theta - q_n) = A_1 \sin cx + B_1 \cos cx \quad (6.126)$$

同样可以得出  $m_x = -2n_\theta + 2$ ,  $m_x = -2n_\theta - 2$ ,  $m_x = 2n_\theta + 2$  的  $n_\theta$  解, 均与式 (6.126) 相同, 而  $m_x = \pm 1$  时,  $n_\theta = q_n$ 。

**算例 6.4** 端部为铰支的长为  $2c$  的圆柱壳, 半径为  $a$ , 受均匀内压  $q_n$  时, 用上 Tresca 屈服准则求出极限荷载以及极限状态时的应力和位移。

**解** 设原点取在跨中对称截面处, 即  $x=0$  处, 这时有边界条件

$$\dot{w}(0) = \dot{w}_0 \quad m_x(0) = 0$$

$$\dot{w}(1) = 0 \quad m_x(1) = 0$$

如图 6.17 所示。

在  $x=0$  处是否出现塑性铰圆, 依据以下两条件之一:

$$\dot{w}(0) = 0 \quad \text{或} \quad m_x(0) = -1$$

当中长柱结构为设计和研究对象时, 应取后式。

在内压  $P$  作用下,  $n_\theta > 0$ ,  $m_x < 0$ , 因此有极限条件

$$f = m_x - 2n_\theta + 2 = 0$$

这样可得内力为

$$n_\theta = A_1 \sin cx + B_1 \cos cx + P$$

$$m_x = 2(P - 1) + 2A_1 \sin cx + 2B_1 \cos cx$$

当  $x=0$  时有  $m'_x=0$ , 由此可求出  $A_1=0$ 。当  $x=1$  时有  $m_x=0$  及  $B_1 = \frac{1-P}{\cos c}$  最后得

$$n_\theta = \frac{1-P}{\cos c} \cos cx + P$$

在  $0 < x < 1$  区域中,  $n_\theta > 0$ , 弯矩为

$$m_x = 2(P - 1) - \frac{2(P - 1)}{\cos c} \cos cx$$

再由条件  $x=0$  时,  $m_x = -1$ , 代入上式求出

$$2(P - 1) - \frac{2(P - 1)}{\cos c} = -1$$

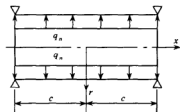


图 6.17 均匀内压圆柱壳

极限荷载为

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 - \cos c)}$$

式中,  $P$  为无量纲式,  $P = \frac{q_s a^2}{N_s}$ 。当  $c = \frac{\pi}{2}$  时, 可得  $P = 1$  即  $q_s = \frac{N_s}{a}$ 。这相当于薄膜内力达到极限值并引起圆柱壳的塑性破坏, 这时壳的挠度  $w$  为

$$\dot{w} = A \sin cx + B \cos cx$$

在  $x = 0$  处, 有  $\dot{w} = \dot{w}_0$ , 而在  $x = 1$  处, 有  $\dot{w} = 0$ 。由此可确定其中的  $A$  和  $B$ , 最后有

$$\dot{w} = w_0 (\cos cx - \operatorname{ctg} c \sin cx)$$

## 第七章 非线性扁壳及屋盖结构

### 7.1 矩形底扁壳结构

矩形底的扁壳分为抛物面扁壳和球面扁壳。如图 7.1 所示,底面为  $xy$  矩形平面上的扁壳,令扁壳中面上任意点  $M$  的高度为  $z$ ,则中曲面方程为

$$z = F(x, y) \quad (7.1)$$

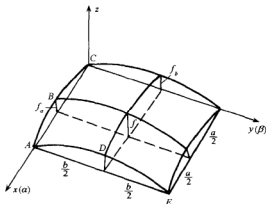


图 7.1 矩形底扁壳

由于扁壳的扁平性,它在坐标方向的曲率及扭率可近似地取为

$$\left. \begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ k_y &= -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

一般地,扁壳屋盖的中面作成平移曲面,如图 7.1 中  $ABC$  曲线沿  $ADE$  曲线平移而形成壳面。平面曲线  $ABC$  上任意一点的高度为  $z_1 = F_1(x)$ ,而曲线  $ADE$  上任一点的高度为  $z_2 = F_2(y)$ ,则平移曲面上任意一点的高度为

$$z = z_1 + z_2 = F_1(x) + F_2(y)$$

相应地  $k_{xy} = 0$ 。

如果曲线  $ABC$  和  $ADE$  都是抛物线,就会形成抛物面扁壳。在如图 7.1 所示的

直角坐标系中, 曲面方程为

$$z = 4f_a \left( \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right) + 4f_b \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (7.3)$$

式中,  $f_a, f_b$  分别为  $xz$  面及  $yz$  面的边界曲线的矢高, 而中面的最大矢高为  $f = f_a + f_b$ 。中面在  $x$  和  $y$  方向的曲率半径为

$$R_x = \frac{1}{k_x} = \frac{a^2}{8f_a} \quad R_y = \frac{1}{k_y} = \frac{b^2}{8f_b} \quad (7.4)$$

曲率半径是不随坐标轴平移而改变的常量。当曲线  $ABC$  和  $ADE$  都是圆弧, 并有  $R_x = R_y = R$  时, 则形成了球面扁壳。

在一般薄壳的平衡方程中, 不计入横向剪力对纵向平衡的影响, 而纵向荷载对位移及内力的影响也很次要, 分别以  $N_x, N_y, N_{xy}$  表示顺剪力, 以  $M_x, M_y, M_{xy}$  表示弯矩和扭矩, 则有平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ (k_x N_x + k_y N_y) - \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) &= q \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

式中,  $q$  为壳面法向体积力。

物理方程则为

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) \\ N_y &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \nu_{xy} \\ M_x &= D(\mathcal{H}_x + \mu \mathcal{H}_y) \\ M_y &= D(\mathcal{H}_y + \mu \mathcal{H}_x) \\ M_{xy} &= (1 - \mu) D \mathcal{H}_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

式中,  $h$  为壳厚度;  $\mu$  为泊松比。如果用薄膜理论求扁壳内力, 即略去平衡方程中的弯矩和扭矩, 这时式(7.5)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ k_x N_x + k_y N_y &= q \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

此时可引用内力函数  $\phi = \phi(x, y)$ , 并命

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad N_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

将上式代入式(7.7)中前两个方程,可知是满足的,再代入第三个方程则有

$$\nabla_i^2 \phi = q \quad (7.8)$$

式中,  $\nabla_i^2$  为二阶微分算子,形式为

$$\nabla_i^2(\quad) = k_y \frac{\partial^2(\quad)}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2(\quad)}{\partial y^2} \quad (7.9)$$

方程(7.8)可按双三角级数求解,此时,要根据结构工程中双向支座简支条件确定解的形式,其条件为

$$\left. \begin{aligned} (N_x)_{x=0} &= 0 & (N_x)_{x=a} &= 0 \\ (N_y)_{y=0} &= 0 & (N_y)_{y=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

可写出内力函数  $\phi(x, y)$ , 为

$$\phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)$$

将这一满足边界条件(7.10)的含待定常数  $A_{mn}$  的函数代入方程(7.8),得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{mn} \left( k_y \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + k_x \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] = q$$

将荷载  $q$  也展开成双三角级数,有

$$q = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]$$

代入方程中,并比较两边的系数可求出  $A_{mn}$ ,最后得出

$$\phi = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{k_y \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + k_x \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)$$

例如,扁壳受均布荷载  $q_0$ ,即  $q = -q_0$ ,可以算出

$$\int_0^a \int_0^b \left( q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right) = -\frac{4q_0 ab}{\pi^2 mn} (m, n = 1, 3, 5, \dots)$$

此时  $\phi$  为

$$\phi = \frac{16q_0 R_y a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2)}$$

式中,  $\sigma = \frac{a}{b}$ ;  $\rho = \left( \frac{R_x}{R} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{2}}$ ;  $R_y$  为  $y$  方向上壳体任一点的曲率半径。

然后利用微分关系,可以求出壳中薄膜内力,为

$$N_x = -\frac{16q_0 R_y \sigma^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2)}$$

$$N_y = -\frac{16q_0 R_y}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2)}$$

$$N_{xy} = -\frac{16q_0 R_y \sigma}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2)}$$

如果计算扁壳结构的有矩效应,仍可用以上引用的内力函数  $\phi(x, y)$ ,同时引用挠度  $w$  表示的弯矩和扭矩,即

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

横向剪力用  $w$  表示为

$$V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (7.12)$$

这样就形成了由内力函数  $\phi$  及挠度  $w$  表达的扁壳有矩理论解。具体求解过程是利用  $\phi$  及  $w$  代入平衡方程(7.5),得

$$D \nabla^4 w + \nabla_i^2 \phi = q \quad (7.13)$$

引入扁壳的几何方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_x w & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + k_y w \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \mathcal{H}_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \mathcal{H}_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \mathcal{H}_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

从式(7.14)的前三式中消去  $u$  和  $v$ ,得出用  $\phi$  及  $w$  表示的变形协调方程,为

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \nabla_i^2 w = 0 \quad (7.15)$$

代入物理关系后,式(7.15)成为

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \phi - \nabla_i^2 w = 0 \quad (7.16)$$

式(7.13)与式(7.16)组成扁壳结构有矩理论的混合型方程。解这一混合型方程,可引用另一函数  $F(x, y)$ ,并将  $\phi$  及  $w$  分别表示为

$$w = \nabla^4 F \quad \phi = Eh \nabla_i^2 F$$

平衡方程改为



$$\nabla^4 F + \frac{Eh}{D} \nabla^2 F = \frac{q}{D} \quad (7.17)$$

内力与  $F$  的关系为

$$\left. \begin{aligned} N_x &= Eh \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 F \\ N_y &= Eh \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 F \\ N_{xy} &= Eh \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 F \\ M_x &= -D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 F \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \nabla^2 F \\ M_{xy} &= -(1 - \mu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 F \\ V_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^4 F \\ V_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^4 F \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

将扁壳中面位移  $u$  和  $v$  用  $F$  表达, 在不计刚体位移情况下, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ k_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \mu \nabla^2 \right] F \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ k_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \mu \nabla^2 \right] F \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} &= -2(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 F \end{aligned}$$

积分之后有

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \mu \nabla^2 \right] F \\ v &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \mu \nabla^2 \right] F \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

如果工程结构上有简支边界条件, 在  $y$  为常数的边界上有

$$v = 0 \quad w = 0 \quad N_y = 0 \quad M_y = 0$$

用  $\phi$  及  $w$  表示, 则有

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (7.20)$$

同样, 上述条件发生在  $x$  为常数的边界上, 那么应有

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (7.21)$$

将上述式子用  $F$  表达, 则在  $y$  为常数的边界上有

$$\nabla_i^2 F = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla_i^2 F = 0 \quad \nabla^4 F = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^4 F = 0 \quad (7.22)$$

而在  $x$  为常数的边界上有

$$\nabla_i^2 F = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla_i^2 F = 0 \quad \nabla^4 F = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^4 F = 0 \quad (7.23)$$

显然,在  $x$  为常数的边界上满足了条件

$$F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \frac{\partial^6 F}{\partial x^6} = 0$$

就能满足式(7.23),同样,在  $y$  为常数的边界上满足了条件

$$F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \frac{\partial^6 F}{\partial y^6} = 0$$

也就满足了式(7.22)。

如果按简支边界条件,扁壳结构有矩内力的解可以选择  $F(x, y)$  为双三角级数,即

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)$$

这样的函数是能满足边界条件的。另外将扁壳的法向荷载  $q$  展成双三角级数,则有

$$q = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7.24)$$

将  $F(x, y)$  与  $z$  代入平衡方程(7.17),比较两边的系数,得出  $A_{mn}$ ,最后得  $F(x, y)$ ,为

$$F(x, y) = \frac{4a^4 \sigma}{\pi^8 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{(m^2 + \sigma^2 n^2)^4 + \tau(m^2 + \frac{\sigma^2}{\rho^2} n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \quad (7.25)$$

式中,  $\sigma$  及  $\rho$  同前述表达;  $\tau$  为一个无因次的常数,为

$$\tau = \frac{12(1 - \mu^2)a^4}{\pi^4 h^2 R^2} \quad (7.26)$$

对矩形底的球面扁壳,由于  $R_1 = R_2 = R$ ,那么  $\nabla_i^2$  简化为  $\frac{1}{R} \nabla^2$ ,混合型扁壳方程简化为

$$\left. \begin{aligned} D \nabla^4 w + \frac{1}{R} \nabla^2 \phi &= q \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 \phi - \frac{1}{R} \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

现引用一个新的函数  $f(x, y)$ ,并有

$$f(x, y) = \frac{1}{Eh} \nabla^2 \phi - \frac{1}{R} w \quad (7.28)$$

则  $\nabla^2 f$  的表达式为

$$\nabla^2 f = \frac{1}{Eh} \nabla^4 \phi - \frac{1}{R} \nabla^2 w$$

由式(7.27)第二方程可知,上式为零,即 $\nabla^2 f = 0$ ,说明 $f(x, y)$ 应为 $x$ 和 $y$ 的调和函数。

再有,由边界上 $w_i = 0$ ,并由于有 $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i = 0$ 和 $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_i = 0$ ,因而 $(\nabla^2 \phi)_i = 0$ ,于是按式(7.28)可知,有

$$f_i = 0 \quad (\text{在边界上})$$

如果调和函数在某一区域的边界上为零,则在域内为零,由此可断定 $f(x, y) = 0$ 。按 $f(x, y)$ 的定义,则有

$$\nabla^2 \phi = \frac{Eh}{R} w \quad (7.29)$$

代入式(7.27)第一个方程,得到

$$D \nabla^4 w + \frac{Eh}{R^2} w = q \quad (7.30)$$

以上式(7.29)与式(7.30)即是矩形底球面扁壳内力解的微分方程,在均布荷载 $q = -q_0$ 作用下,法向位移 $w$ 的微分方程及边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 w + \frac{Eh}{R^2 D} w &= -\frac{q_0}{D} \\ w_i &= (\nabla^2 w)_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

内力函数 $\phi$ 的微分方程及边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{Eh}{R} w \\ \phi_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

作为式(7.31)的近似分析,可以认为在边缘区,例如在 $x=0$ 附近,不受其余三个边界的影响,而且可把扁壳当成无限大。这样,法向位移 $w$ 将只是 $x$ 的函数,于是式(7.31)变为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2 D} w = -\frac{q_0}{D} \quad (7.33)$$

规范化表达上式,为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = -\frac{q_0}{D}$$

式中, $\lambda = \left[ \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2} \right]^{\frac{1}{4}}$ 。

式(7.33)的解为

$$w = e^{-\lambda x} (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x) + e^{\lambda x} (A_3 \cos \lambda x + A_4 \sin \lambda x) - \frac{q_0 R^2}{Eh}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $w$ 应有界,故 $A_3 = A_4 = 0$ ,再利用式(7.31)的边界条件

$$w|_{x=0} = 0 \quad \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = 0$$

可以求出常数  $A_1$  和  $A_2$ , 最后得

$$w = -\frac{q_0 R^2}{Eh} (1 - e^{-kx} \cos \lambda x) \quad (7.34)$$

相应的弯矩  $M_x$  与  $M_y$  在边缘区的近似解答为

$$\begin{aligned} M_x &= - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &= -\frac{q_0 R h}{2\sqrt{3}(1-\mu^2)} e^{-kx} \sin \lambda x \end{aligned}$$

$$M_y = \mu M_x$$

将  $w$  的表达式(7.34)代入式(7.32)中, 可得

$$\nabla^2 \phi = -q_0 R (1 - e^{-kx} \cos \lambda x)$$

如果以  $N'_x$  与  $N'_y$  表示在  $q_0$  作用下扁壳的薄膜内力, 显然应当有

$$N'_x + N'_y = -q_0 R \quad (7.35)$$

按  $\phi$  函数的定义, 有矩理论的内力  $N_x$  与  $N_y$  分别为

$$N_x + N_y = -q_0 R (1 - e^{-kx} \cos \lambda x)$$

因为设定了  $N_x = N'_x$ , 故有

$$N_y = N'_y + q_0 R (e^{-kx} \cos \lambda x)$$

类似地, 可以计算  $y=0$  边缘区的内力。

在角偶区, 例如  $x=y=0$  附近, 此时不能简单地把式(7.31)简化为式(7.33), 可取式(7.31)中的  $w$  为

$$w = \int_0^\infty \int_0^\infty F(m, n) \sin m x \sin n y \, dmdn \quad (7.36)$$

这样的  $w$  将满足边界条件

$$w|_{x=0} = (\nabla^2 w)_{x=0} = 0$$

$$w|_{y=0} = (\nabla^2 w)_{y=0} = 0$$

另将  $\frac{q_0}{D}$  表达成式(7.36)类似的形式, 则有

$$-\frac{q_0}{D} = -\frac{4q_0}{\pi^2 D} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m x \sin n y}{mn} \, dmdn \quad (7.37)$$

将式(7.36)和式(7.37)代入式(7.31), 并比较方程两边的系数, 可以求出  $F(m, n)$ , 从而得出

$$w = -\frac{4q_0}{\pi^2 D} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m x \sin n y}{mn[(m^2 + n^2) + 4\lambda^4]} \, dmdn \quad (7.38)$$

从而可得角偶区较大的扭矩为

$$M_{xy} = - (1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$= \frac{4(1-\mu)q_0}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos m.x \cos n.y}{(m^2 + n^2) + 4\lambda^4} dmdn$$

将  $w$  表达式代入式 (7.32), 从而得出  $\phi$  为

$$\nabla^2 \phi = - \frac{16\lambda^4 q_0 R}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m.x \sin n.y}{mn[(m^2 + n^2) + 4\lambda^4]} dmdn$$

相应的边界条件  $\phi|_{x=0}=0, \phi|_{y=0}=0$ 。

将  $\phi$  按类似于式 (7.36) 的形式表达, 为

$$\phi = \int_0^\infty \int_0^\infty f(m, n) \sin m.x \sin n.y dmdn \quad (7.39)$$

显然, 上式满足边界条件。将  $\phi$  的表达式 (7.39) 代入式 (7.32), 比较方程的两边系数, 求出  $f(m, n)$ , 并代回到式 (7.39) 中, 得

$$\phi = \frac{16\lambda^4 q_0 R}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m.x \sin n.y}{mn(m^2 + n^2)[(m^2 + n^2) + 4\lambda^4]} dmdn \quad (7.40)$$

利用类似的傅里叶重积分形式的解, 可以得出薄膜内力  $\phi'$  在方程

$$\nabla^2 \phi' = -q_0 R$$

及在边界条件  $(\phi')_{x=0}=0, (\phi')_{y=0}=0$  下的解, 为

$$\phi' = \frac{4q_0 R}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m.x \sin n.y}{mn(m^2 + n^2)} dmdn \quad (7.41)$$

将式 (7.40) 与式 (7.41) 组合成总内力  $\phi$ , 并进一步利用  $N_x = \frac{\partial \phi}{\partial x \partial y}$ , 可求出角偶区的另一主要内力。

计算表明, 矩形底的扁壳结构, 应力函数  $\phi$  的变化是均匀的, 而位移  $w$  在靠近边缘处虽然其值很小, 但它的变化率很大。用上述在  $x=0$  时假定  $w$  仅为  $x$  的函数的办法, 也能计算矩形底的非圆球面壳, 获得的内力和位移可在结构设计中应用。

在扁壳结构的计算中, 无论是薄膜内力还是有矩内力, 所选取的双三角级数在边界附近不尽合理, 这是因为按图 7.1 选取的应力函数为双三角级数, 所获得的内力也是双三角级数; 在  $x=0$  或  $y=0$  边界, 都会出现薄膜内力  $N_x=N_y=0$ , 显然这是不合理的。事实上, 在  $x=0$  的边界,  $N_y \neq 0$ , 而在  $y=0$  的边界,  $N_x \neq 0$ 。采用双三角级数的有矩内力也有这种现象。

一般在设计与计算扁壳结构时, 边界线附近的荷载可认为与垂直方向上的坐标无关, 而仅展成单三角级数, 由此可以求出该边界上的有效内力, 避免了两个方向内力均为零的现象。

**算例 7.1** 计算矩形底抛物面扁壳屋盖内力。矩形底如图 7.1 所示,  $a=30\text{m}$ ,  $b=40\text{m}$ , 承受的均匀法向荷载为  $1.5\text{kN/m}^2$ , 扁壳跨中矢高  $f_a=3\text{m}$ ,  $f_b=4\text{m}$ 。

**解** 抛物面壳的高度  $z$  的方程为

$$z = 4f_a \left( \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right) + 4f_b \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$R_x = \frac{a^2}{8f_a} = 37.5\text{m}$$

$$R_y = \frac{b^2}{8f_b} = 50\text{m}$$

按壳厚为 10cm 的混凝土材料计算,计入荷载系数后得法向压力  $q=5.1\text{kN/m}^2$ 。内力公式为

$$N_x = -232.5 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m(m^2 + 0.75n^2)}$$

$$N_y = -413.4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n(m^2 + 0.75n^2)}$$

$$N_{xy} = -310.0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m^2 + 0.75n^2}$$

比较级数的收敛过程,如选取壳面的中点,即在  $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$  处,则有

$m=n=1$  时,

$$N_x = -132.9\text{kN/m} \quad N_y = -236.3\text{kN/m} \quad N_{xy} = 0$$

$m=1, n=3$  时,

$$N_x = 90\text{kN/m} \quad N_y = 17.8\text{kN/m} \quad N_{xy} = 0$$

$m=3, n=1$  时,

$$N_x = 7.95\text{kN/m} \quad N_y = 127.19\text{kN/m} \quad N_{xy} = 0$$

$m=3, n=3$  时,

$$N_x = -14.76\text{kN/m} \quad N_y = -26.24\text{kN/m} \quad N_{xy} = 0$$

取四项之和为

$$N_x = -49.7\text{kN/m} \quad N_y = -117.5\text{kN/m} \quad N_{xy} = 0$$

再如对  $x=y=0$  的角点,有

$m=n=1$  时,

$$N_{xy} = -177.1\text{kN/m} \quad N_x = 0 \quad N_y = 0$$

$m=1, n=3$  时,

$$N_{xy} = -40\text{kN/m} \quad N_x = 0 \quad N_y = 0$$

$m=3, n=1$  时,

$$N_{xy} = -31.8\text{kN/m} \quad N_x = 0 \quad N_y = 0$$

$m=3, n=3$  时,

$$N_{xy} = -19.7\text{kN/m} \quad N_x = 0 \quad N_y = 0$$

故四项之和为

$$N_{xy} = -268.6 \text{ kN/m} \quad N_x = 0 \quad N_y = 0$$

在  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{4}$  处, 其合力为

$$N_x = -141.6 \text{ kN/m} \quad N_y = -71.1 \text{ kN/m} \quad N_{xy} = 0$$

在  $x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{2}$  处, 其合力为

$$N_x = -25.6 \text{ kN/m} \quad N_y = -225.7 \text{ kN/m} \quad N_{xy} = 0$$

根据有矩理论分析, 计算中的壳中各点薄膜内力  $N_x, N_y, N_{xy}$  是主要的, 边界与角点处的弯矩与扭矩不容忽略, 因此这里计算的角点内力  $N_{xy}$  仅是其中一个部分, 另一部分则由扭矩得来, 对应的应力函数  $\phi'$  为

$$\phi' = \frac{16\lambda^4 q R}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m x \sin n y}{m n (m^2 + n^2) [(m^2 + n^2) + 4\lambda^4]} d m d n$$

$$N_{xy} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \quad \lambda = \left[ \frac{3(1 - \mu^2)}{R^2 h^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

式中,  $h$  为壳厚;  $R$  可取  $R_x$  与  $R_y$  的平均值。

## 7.2 圆形底扁球壳结构

上一节在讨论扁壳时, 其中给出了矩形底扁球壳的内力。这里进一步讨论圆形底扁球壳结构的内力。

设圆形底扁球壳的中面坐标为

$$z = \sqrt{R^2 - r^2} - (R - z_0) \quad (7.42)$$

式中,  $R$  为球面半径;  $z_0$  为壳的矢高, 如图 7.2 所示。

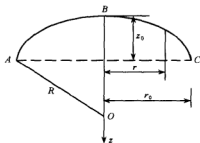


图 7.2 圆形底扁球壳

对于扁球壳, 可令

$$\frac{dz}{dr} = - \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \approx - \frac{r}{R} \quad (7.43)$$

对轴对称的分布荷载, 可取半径  $r$  为独立变量, 其平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(rN_r)}{dr} - N_\theta - \frac{r}{a}V_r + rP_r &= 0 \\ \frac{d(rV_r)}{dr} + \frac{r}{a}(N_r + N_\theta) + rP_n &= 0 \\ \frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta - rV_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

式中,  $P_n$ 、 $P_r$  分别为法向和径向荷载。如果分别以  $w$  和  $v$  表示壳的法向位移和径向位移, 可以写出位移与应变关系式为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E t} (N_r - \mu N_\theta) = \frac{dw}{dr} - \frac{w}{a} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E t} (N_\theta - \mu N_r) = \frac{v}{r} - \frac{w}{a} \\ M_r &= -D \left( \frac{dw}{dr} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\theta &= -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

式中,  $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$ , 其中  $h$  为壳厚度。

如果进一步假设, 在扁壳情况下, 横向剪力  $V_r$  对薄膜内力的影响可略去不计, 再设径向荷载  $P_r = -\frac{dV}{dr}$ ,  $V$  为荷载势函数, 则有

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + V \\ N_\theta &= \frac{d^2 F}{dr^2} + V \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

这样式(7.45)可得到满足, 式(7.46)中  $F$  为应力函数。容易证明, 应变与位移关系式(7.45)应满足以下协调方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\epsilon_\theta}{dr} \right) - \frac{1}{r} \frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{1}{R} \nabla^2 w &= 0 \\ \nabla^2(\cdot) &= \frac{d^2(\cdot)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(\cdot)}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (7.47)$$

将式(7.44)第三式与式(7.47)相结合, 可以得到应力函数  $F$  和挠度的基本方程, 为

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{E t}{R} \nabla^2 w = - (1 - \mu) \nabla^2 V \quad (7.48)$$

为了求得  $F$  和  $w$  的另一关系式, 可由式(7.44)中第三式解出  $V_r$ , 并代入第二式, 从而有

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta \right] + \frac{r}{R} (N_r + N_\theta) + rP_n = 0 \quad (7.49)$$

现将式(7.45)中后两式及式(7.46)代入上式, 可得出



$$\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{DR} \nabla^2 F = \frac{P_s}{D} + \frac{2V}{DR} \quad (7.50)$$

如果引用两个参量,即垂直剪力  $V_z$  和水平位移  $\delta$ ,并分别表示成

$$\left. \begin{aligned} V_z &= V_r + \frac{r}{R} N_r \\ \delta &= v - \frac{r}{R} w \end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

则有横向剪力表达式

$$V_r = -D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \quad (7.52)$$

以上方程的解比较繁琐。

对于在结构工程中,常见的承受均布法向荷载  $q$  作用的球形扁壳,其挠度  $w$  应满足方程

$$\nabla^2 \nabla^2 w + w = \frac{qR^2}{Eh} \quad (7.53)$$

该方程的特解为

$$w^* = \frac{qR^2}{Eh}$$

式(7.53)的齐次方程部分可分为两个共轭的二阶方程,如令  $\eta = \phi \sqrt{i}$ , 则其中第一个方程为

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dw}{d\eta} + w = 0 \quad (7.54)$$

式中,  $\phi = \frac{r}{r_0}$ 。式(7.54)是零阶贝塞尔方程,它的解可写成四个零阶的 Tomson(汤姆生)函数。计入特解后,得出全解为

$$w(\phi) = c_1 \text{ber} \phi + c_2 \text{bei} \phi + c_3 \text{ker} \phi + c_4 \text{kei} \phi + \frac{qR^2}{Eh} \quad (7.55)$$

如果壳顶不开孔,必有条件

$$\begin{aligned} (w)_{\phi=0} &= \text{有限值} \\ \int_0^{2\pi} (V_r r d\theta) \Big|_{\phi=0}^{r=r_0} &= 0 \end{aligned}$$

按第一条件可知,对  $\text{ker} \phi$ , 在  $\phi \rightarrow 0$  时有一个  $\ln \phi$  的奇点,故必须  $c_3 = 0$ 。按第二条件可知

$$\int_0^{2\pi} (V_r r d\theta) \Big|_{\phi=0}^{r=r_0} = \frac{2\pi D c_4}{r_0^2} = 0$$

故有  $c_4 = 0$ , 因而此时式(7.55)可简化为

$$w(\phi) = c_1 \text{ber} \phi + c_2 \text{bei} \phi + \frac{qR^2}{Eh} \quad (7.56)$$

如果壳底是固定的,则存在两个边界条件,为

$$w|_{\phi=\phi_0} = 0 \quad w'|_{\phi=\phi_0} = 0$$

代入式(7.56),分别求得  $c_1$  与  $c_2$ ,再代回  $w$  式中,最后挠度  $w$  为

$$w = \frac{qR^2}{Eh} \left( \frac{\text{ber}'\phi_0 \text{ber}\phi - \text{ber}'\phi \text{ber}\phi_0}{\text{bei}\phi_0 \text{ber}'\phi_0 - \text{ber}\phi_0 \text{bei}'\phi_0} + 1 \right) \quad (7.57)$$

式中,  $r_0$  为边界处的  $r$  值。

由此  $w$  可计算内力,按轴对称考虑有  $M_{r\theta} = V_\theta = 0$ ,而对  $M_r$ 、 $M_\theta$  及  $V_r$ ,可利用以下微分关系求解。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{D}{r_0^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \mu \frac{1}{\phi} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \\ M_\theta &= -\frac{D}{r_0^2} \left( \frac{1}{\phi} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \\ V_r &= -\frac{D}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (7.58)$$

壳中的薄膜内力应依据应力函数  $\Phi$  求出,其表达式为

$$\nabla^2 \Phi = \frac{Ehr_0^2}{R} w \quad (7.59)$$

而内力为

$$\left. \begin{aligned} N_r &= -\frac{1}{r_0^2} \frac{1}{\phi} \frac{d\Phi}{d\phi} \\ N_\theta &= -\frac{1}{r_0^2} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} \\ N_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

将式(7.59)展开,得

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{\phi} \frac{d\Phi}{d\phi} = \frac{Ehr_0^2}{R} w \quad (7.61)$$

这一方程的齐次解为

$$\Phi_1 = A_1 \ln \phi + A_2$$

它的特解为

$$\Phi_2 = qRr_0^2 \left( \frac{\text{ber}'\phi_0 \text{bei}\phi + \text{ber}'\phi \text{ber}\phi_0}{\text{bei}\phi_0 \text{ber}'\phi_0 - \text{ber}\phi_0 \text{bei}'\phi_0} + \frac{\phi^2}{4} \right)$$

其中代入以下关系:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{1}{\phi} \frac{d}{d\phi} \right) \left( \frac{\phi^2}{4} \right) &= 1 \\ \left( \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{1}{\phi} \frac{d}{d\phi} \right) (\text{ber}\phi) &= -\text{bei}\phi \\ \left( \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{1}{\phi} \frac{d}{d\phi} \right) (\text{bei}\phi) &= -\text{ber}\phi \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

将  $\Phi_1$  与  $\Phi_2$  相加,即为  $\Phi$  的全解。由于解中  $A_2$  对内力毫无影响,故可令  $A_2=0$ ,常

数  $A_1$  可按壳顶条件  $N_r|_{\phi=0}$  有界值定出  $A_1=0$ , 所以最后

$$\Phi = \Phi_2$$

再代入式(7.60), 可求出各  $\phi$  值对应的  $N_r$  与  $N_\theta$  值。

Tomson 函数的表达式见本书 107 页。

在  $\zeta > 0$  时, Tomson 函数有以下近似计算公式:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}'\zeta &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \exp\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{ber}'\zeta &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \exp\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{bei}'\zeta &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \exp\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{bei}'\zeta &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \exp\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{ker}\zeta &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{ker}'\zeta &\approx -\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{kei}\zeta &\approx -\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{kei}'\zeta &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned} \right\} \quad (7.63)$$

Tomson 函数的循环公式是

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}_{n+1}\zeta &= -\frac{\sqrt{2}n}{\zeta} (\text{ber}_n\zeta - \text{bei}_n\zeta) - \text{ber}_{n-1}\zeta \\ \text{bei}_{n+1}\zeta &= -\frac{\sqrt{2}n}{\zeta} (\text{ber}_n\zeta + \text{bei}_n\zeta) - \text{bei}_{n-1}\zeta \\ \text{ker}_{n+1}\zeta &= -\frac{\sqrt{2}n}{\zeta} (\text{ker}_n\zeta - \text{kei}_n\zeta) - \text{ker}_{n-1}\zeta \\ \text{kei}_{n+1}\zeta &= -\frac{\sqrt{2}n}{\zeta} (\text{ker}_n\zeta + \text{kei}_n\zeta) - \text{kei}_{n-1}\zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.64)$$

在有了挠度表达式之后, 计算内力时还须用以下一些 Tomson 函数的导数递推关系:

$$\text{ber}''\xi = -\text{bei}\xi - \frac{1}{\xi} \text{ber}'\xi$$

$$\text{bei}''\xi = \text{ber}\xi - \frac{1}{\xi}\text{bei}'\xi$$

$$\text{ker}''\xi = -\text{kei}\xi - \frac{1}{\xi}\text{ker}'\xi$$

$$\text{kei}''\xi = \text{ker}\xi - \frac{1}{\xi}\text{kei}'\xi$$

扁球壳弯曲内力与位移的关系可通过将  $w(\phi)$  表达式代入式(7.58)及式(7.60)中得出。

**算例 7.2** 计算圆形底球面扁壳屋盖。圆形底半径为 25m, 扁壳屋盖厚取 10cm, 受法向均匀荷载  $1.5\text{kN/m}^2$  作用, 按混凝土材料设计, 取  $E=25.5\text{kN/mm}^2$ 。

**解** 按底圆半径  $r_0=25\text{m}$  计, 则球壳平均半径  $R^2=r_0^2+(R-f)^2$ , 取矢高  $f=5\text{m}$ , 则有  $R=65\text{m}$ , 最大幅角为  $\phi=22.62^\circ(0.3948)$ , 法向荷载为  $q=1.5\times 1.4+0.1\times 25\times 1.2=5.1\text{kN/m}^2$ 。

Tomson 函数仅取前两项计算, 则有内力公式为

$$M_r = -5.8464\phi^2 - 0.0077\phi^4 + 0.3358$$

$$M_\theta = -2.7693\phi^2 - 0.0027\phi^4 + 0.3358$$

$$V_r = -0.5908\phi^2 - 0.0014\phi^4$$

$$N_r = -62.9 - 862.954\phi^4 + 403.551\phi^2$$

$$N_\theta = -62.9 - 4314.77\phi^4 + 1210.652\phi^2$$

由于结构的轴对称性, 可仅选择一条径向线上的点进行内力计算, 如表 7.1 所示, 分别为

表 7.1 球扁壳内力计算表

$\phi$	0	0.0493	0.0987	0.1480	0.1974	0.2467	0.2961	0.3454	0.3948
$M_r$	0.3358	0.3215	0.2788	0.2076	0.107	-0.02	-0.177	-0.362	-0.575
$M_\theta$	0.3358	0.3290	0.3088	0.2751	0.2278	0.1671	0.093	0.005	-0.096
$N_r$	-62.9	-62.65	-59.05	-54.47	-48.49	-41.53	-34.15	-27.03	-20.97
$N_\theta$	-62.9	-62.16	-51.51	-38.44	-22.78	-5.18	10.07	20.16	20.97

由图 7.3、7.4 中的内力分布可知, 球形扁壳的弯矩内力也是按振动型分布的, 即在壳顶与固定边缘处, 弯矩是不同方向的。球形扁壳与球壳的不同之处是球壳的弯矩内力在固定边缘处较大, 而后急剧衰减, 而扁壳则显出圆形板的特征, 弯矩并不急剧衰减。因此球形扁壳有矩内力介于球壳与圆形板之间变化。

球形扁壳与圆形板更大的不同之处在于, 在法向荷载作用下有较大的薄膜内力  $N_r$  与  $N_\theta$ , 因此对球形扁壳作进一步结构设计时应同时考虑弯矩与轴力的共同

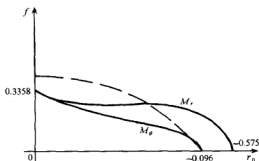


图 7.3  $M_r, M_\theta$  图

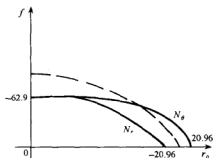


图 7.4  $N_r, N_\theta$  图

作用,并按偏心拉压构件进行钢筋混凝土结构的断面及配筋计算。

### 7.3 非线性球形扁壳的精确解法<sup>1)</sup>

球形扁壳的大挠度变形问题属于球形扁壳的非线性计算范围。一般地说,非线性球形扁壳的计算是颇为繁琐的,摄动法是其中的一种方法。作者在这里创造的步进法是另一种分析非线性结构及方程的方法,它是借助于小挠度的方程,将大挠度变形划分为许多段,每一增量变形视为在前一阶段基础上的小变形,则一个小增量的变形引起的挠度即为带有初始挠度下的小挠度变形。这时在计算方程时,引用线性挠度或小挠度的假设比较合理,最后将各阶段结果求和,获得精确的挠度及内力值,从而使得非线性球形扁壳的结果能用解析式加以表达。

1) 贾乃文. 球形扁壳超临界变形的步进求和计算. 应用数学与力学, 1987 年 2 期

球形扁壳轴对称变形的大挠度方程为

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr}(\nabla^2 w) &= \psi + \frac{h}{r} \frac{d\phi}{dr} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{dz}{dr} \right) \\ \frac{d}{dr}(\nabla^2 \phi) &= -\frac{E}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dz}{dr} \frac{dw}{dr} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.65)$$

式中,  $\psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr$ ;  $\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d(\cdot)}{dr} \right]$ ;  $z$  为扁壳的形状方程, 可把它视为圆板大挠度变形时的初始挠度, 即

$$w = f \left( \alpha - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^2 \quad (7.66)$$

式中,  $f$  为参数, 即壳的矢高;  $\alpha$  为为满足边界条件而设的待定常数;  $R$  为球壳半径;  $h$  为壳厚;  $r_0$  为壳底边缘处的水平圆半径。

若把扁壳的全部变形过程分许多步来实现, 则第  $i-1$  步时各变量值分别是

$$\left. \begin{aligned} W &= \sum_{k=0}^{i-1} w_k \\ \Phi &= \sum_{k=0}^{i-1} \phi_k \\ \Psi &= \sum_{k=0}^{i-1} \psi_k \end{aligned} \right\} \quad (7.67)$$

再把这些变量作为初值, 加入第  $i$  步的变形, 则得第  $i$  步结束时的各变量, 为

$$\left. \begin{aligned} w &= W + w_i \\ \phi &= \Phi + \phi_i \\ \psi &= \Psi + \psi_i \end{aligned} \right\} \quad (7.68)$$

显然, 无论式(7.67)或式(7.68)都应满足方程式(7.65)。若将式(7.68)代入式(7.65), 考虑式(7.67)应满足式(7.65)的结果, 得第  $i$  步计算公式为

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr}(\nabla^2 w_i) &= \phi_i + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw_i}{dr} + \frac{h}{r} \frac{d\phi}{dr} \left[ \frac{dW}{dr} + \frac{dw_i}{dr} \right] \\ \frac{d}{dr}(\nabla^2 \phi_i) &= -\frac{E}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dw_i}{dr} \right)^2 + \frac{dW}{dr} \frac{dw_i}{dr} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.69)$$

式中,  $\bar{W} = W + w_i$ 。

式(7.69)即是步进法求非线性球形扁壳的基本方程, 这一方程没有忽略所谓的高阶小量项, 因此是一个精确式。为计算方便, 将式(7.69)无量纲化, 引入记号

$$\left. \begin{aligned} W^* &= \frac{\bar{W}}{h} & \rho &= \frac{r}{r_0} & \Phi^* &= \frac{\Phi}{Eh^2} & \phi^* &= \frac{\phi_i}{Eh^2} \\ w_i^* &= \frac{w_i}{h} & \phi_i^* &= \frac{1}{\rho} \int_0^\rho q_i^* \rho d\rho & q_i^* &= \frac{q_i}{E} \left( \frac{r_0}{h} \right)^4 \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

从而将方程改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 w^*) &= \psi^* + \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi^*}{d\rho} \frac{dw^*}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d\phi^*}{d\rho} \left( \frac{dW^*}{d\rho} + \frac{dw^*}{d\rho} \right) \\ \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 \phi^*) &= -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dw^*}{d\rho} \right)^2 + \frac{dW^*}{d\rho} \frac{dw^*}{d\rho} \right] \\ \nabla^2(-) &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d(-)}{d\rho} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.71)$$

如壳边缘弹性固定,则有无量纲形式的边界条件,为

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2 w^*}{d\rho^2} + k_1 \frac{dw^*}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=1} &= 0 & k_1 &= \mu + \frac{\beta_1 r_0}{D} \\ \left( \frac{d^2 \phi^*}{d\rho^2} + k_2 \frac{d\phi^*}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=1} &= 0 & k_2 &= \frac{Eh}{\beta_2 r_0} - \mu \end{aligned} \right\} \quad (7.72)$$

式中,  $\beta_1$  为壳底边缘处沿边缘每单位长度内,转过单位转角所需的力矩;  $\beta_2$  为壳底边缘处沿边缘每单位长度内,在半径  $r_0$  方向每伸长单位位移所需的力。壳边缘为固支时,  $\beta_1 = \beta_2 = \infty$ 。

如壳顶无孔,则尚有条件

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\phi^*}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = \text{有限值} \quad (7.73)$$

以下根据式(7.71)以及边界条件式(7.72)、式(7.73)对第  $i$  步变形进行求解。

设有一半径为  $R$ , 厚度为  $h$ , 初始矢高为  $f_0$ , 下底平行圆半径为  $r_0$  的球形扁壳, 受法向荷载  $q$  作用, 下底周边固支。它的中面方程可近似地取

$$z = f_0 \frac{r^2}{r_0^2} \quad (7.74)$$

引入无量纲量

$$\xi_0 = \frac{f_0}{h} \quad \rho = \frac{r}{r_0}$$

由式(7.74)得出

$$w_0 = \xi_0 \rho^2$$

因每一步下的挠度是小挠度,所以可取式(7.66)所示板壳变形的小挠度方程  $w = f \left( \alpha - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^2$ , 将它无量纲化,得

$$w^* = \xi_i (\alpha - \rho^2)^2 \quad (7.75)$$

将式(7.75)代入边界条件式(7.72),得出

$$\alpha = \frac{3 + k_1}{1 + k_1} \quad (7.76)$$

再由  $w^*$  各式计算  $\phi^*$ , 由

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW^*}{d\rho} &= 2\zeta_0\rho - \sum_{k=0}^{i-1} 4\zeta_k\rho(\alpha - \rho^2) \\ \frac{dw^*}{d\rho} &= -4\zeta_i\rho(\alpha - \rho^2) \\ \left(\frac{dw^*}{d\rho}\right)^2 &= 16\zeta_i^2\rho^2(\alpha - \rho^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.77)$$

将以上各式代入式(7.71)中的第二式,得

$$\frac{d}{d\rho}(\nabla^2\phi^*) = -8\zeta_i^2\rho(\alpha - \rho^2)^2 + 8\zeta_0\zeta_i\rho(\alpha - \rho^2) - 16\zeta_i\rho(\alpha - \rho^2) \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k$$

考虑算符 $\nabla^2$ 的含义,上式对 $\rho$ 积分两次,可得

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^*}{d\rho} &= \frac{\zeta_0\zeta_i}{3} \frac{1}{\rho} (\alpha - \rho^2)^3 - \frac{\zeta_i^2}{6} \frac{1}{\rho} (\alpha - \rho^2)^4 - \frac{\zeta_i}{3} \frac{1}{\rho} (\alpha - \rho^2)^4 \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k + \frac{A_1}{2} \rho + \frac{A_2}{\rho} \end{aligned} \quad (7.78)$$

将式(7.78)代入边界条件式(7.73),得

$$A_2 = \frac{\alpha^3}{6} \left( \zeta_i^2\alpha - 2\zeta_0\zeta_i + 2\alpha\zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right) \quad (7.79)$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^*}{d\rho} &= \left[ \frac{1}{3} \left( -3\zeta_0\zeta_i + 2\zeta_i^2\alpha + 4\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right) \alpha^2 + \frac{A_1}{2} \right] \rho \\ &\quad + \left( \zeta_0\zeta_i - \zeta_i^2\alpha - 2\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right) \alpha \rho^3 + \frac{1}{3} \left( -\zeta_0\zeta_i \right. \\ &\quad \left. + 2\zeta_i^2\alpha + 4\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right) \rho^5 - \frac{1}{6} \left( \zeta_i^2 + 2\zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right) \rho^7 \end{aligned} \quad (7.80)$$

将式(7.80)代入边界条件式(7.72)中第二式,并令

$$\nu = \frac{1 - k_2}{1 + k_2}$$

可以得出 $A_1$ 的表达式,为

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{3} \left( 3\zeta_0\zeta_i - 2\zeta_i^2\alpha - 4\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right) \alpha^2 + 2\alpha(\zeta_i^2\alpha \\ &\quad + 2\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k - \zeta_0\zeta_i)(2 + \nu) + \frac{2}{3}(\zeta_0\zeta_i - 2\zeta_i^2\alpha \\ &\quad - 4\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k)(3 + 2\nu) + \frac{1}{3}(\zeta_i^2 - 2\zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k)(4 + 3\nu) \end{aligned} \quad (7.81)$$

将式(7.81)代入式(7.79)中,即得 $\frac{d\phi^*}{d\rho}$ ,经归纳整理后得

$$\frac{d\phi^*}{d\rho} = m_{14}\rho + m_{34}\rho^3 + m_{54}\rho^5 + m_{74}\rho^7 \quad (7.82)$$



$$m_{1i} = \frac{1}{3} \left( -3\zeta_0\zeta_i + 2\zeta_i^2\alpha + 4\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right) \alpha^2 + \frac{A_1}{2}$$

$$m_{3i} = \left( \zeta_0\zeta_i - \zeta_i^2\alpha - 2\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right) \alpha$$

$$m_{5i} = \frac{1}{3} \left( -\zeta_0\zeta_i + 2\zeta_i^2\alpha + 4\zeta_i\alpha \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right)$$

$$m_{7i} = -\frac{1}{6} \left( \zeta_i^2 + 2\zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \right)$$

显然,前  $i-1$  步的函数  $\phi^*$  的和的一阶导数可表示为

$$\frac{d\Phi^*}{d\rho} = M_1\rho + M_3\rho^3 + M_5\rho^5 + M_7\rho^7 \quad (7.83)$$

$$M_1 = \sum_{k=0}^{i-1} m_{1k} \quad M_3 = \sum_{k=0}^{i-1} m_{3k}$$

$$M_5 = \sum_{k=0}^{i-1} m_{5k} \quad M_7 = \sum_{k=0}^{i-1} m_{7k}$$

在均匀法向压力作用下,  $\psi^* = \frac{q^*}{2}\rho$ , 将式(7.82)、(7.83)及  $\psi^*$  代入式(7.71)中的第一式,即求得每一  $i$  步下所加荷载与挠度的关系为

$$\begin{aligned} \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 w^*) &= \frac{q^*}{2}\rho + \frac{1}{\rho} (M_1\rho + M_3\rho^3 + M_5\rho^5 + M_7\rho^7) \\ &\cdot [-4\zeta_i\rho(\alpha - \rho^2)] + \frac{1}{\rho} (m_{1i}\rho + m_{3i}\rho^3 + m_{5i}\rho^5 + m_{7i}\rho^7) \\ &\cdot [2\zeta_0\rho - \sum_{k=0}^{i-1} 4\zeta_k\rho(\alpha - \rho^2) - 4\zeta_i\rho(\alpha - \rho^2)] \end{aligned} \quad (7.84)$$

将上式积分两次,得出

$$\begin{aligned} \frac{1}{12(1-\mu^2)} w^* &= \frac{q^*}{64}\rho^4 + (-4\zeta_i) \left[ M_1 \frac{a\rho^4}{32} + (\alpha M_3 - M_1) \frac{\rho^6}{144} \right. \\ &+ (\alpha M_5 - M_3) \frac{\rho^8}{368} + (\alpha M_7 - M_5) \frac{\rho^{10}}{800} - M_7 \frac{\rho^{12}}{1440} \Big] \\ &+ 2\zeta_0 \left( m_{1i} \frac{\rho^4}{32} + m_{3i} \frac{\rho^6}{144} + m_{5i} \frac{\rho^8}{368} + m_{7i} \frac{\rho^{10}}{800} \right) \\ &+ \left[ m_{1i} \frac{a\rho^4}{32} + (\alpha m_{3i} - m_{1i}) \frac{\rho^6}{144} + (\alpha m_{5i} - m_{3i}) \frac{\rho^8}{368} \right. \\ &+ (\alpha m_{7i} - m_{5i}) \frac{\rho^{10}}{800} - m_{7i} \frac{\rho^{12}}{1440} \Big] \left( -4 \sum_{k=0}^i \zeta_k \right) + \frac{c_1}{4}\rho^2 + c_2 \ln \rho + c_3 \end{aligned} \quad (7.85)$$

由  $\rho=0, w^*$  为有限值,可得  $c_2=0$ ; 由  $\rho=0, w^*=\alpha^2\zeta_i$ , 可得  $c_3 = \frac{\alpha^2}{12(1-\mu^2)}\zeta_i$ ; 由  $\rho=\alpha, w^*=0$ , 可得

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{4} = & -\frac{q^*}{64}a + \zeta_i \left[ \frac{a^2 M_1}{8} + \frac{a^2}{36}(aM_3 - M_1) + \frac{a^3}{92}(aM_5 - M_3) \right. \\
& + \frac{a^4}{200}(aM_7 - M_5) - \frac{a^5 M_7}{360} \left. \right] - \zeta_0 \left( \frac{a}{16}m_{1i} + \frac{a^2}{72}m_{3i} \right. \\
& + \frac{a^3}{184}m_{5i} + \frac{a^4}{400}m_{7i} \left. \right) + \left[ \frac{a^2 m_{1i}}{8} + \frac{a^2}{36}(am_{3i} - m_{1i}) \right. \\
& + \frac{a^4}{92}(am_{5i} - m_{3i}) + \frac{a^4}{200}(am_{7i} - m_{5i}) - \frac{a^5 m_{7i}}{360} \left. \right] \\
& \cdot \left( \sum_{k=0}^i \zeta_k \right) - \frac{a^2 \zeta_i}{12(1 - \mu^2)}
\end{aligned} \quad (7.86)$$

将  $c_1, c_2, c_3$  代回式(7.85)中,并令

$$\rho = 1 \quad \frac{dw^*}{d\rho} = -4\zeta_i(\alpha - 1)$$

得每一步变形下最大挠度  $\zeta_i$  与荷载增量  $q^*$  的关系式,为

$$\begin{aligned}
\frac{q^*}{32} = & \frac{a^2 - 2\alpha + 2}{6(1 - \mu^2)}\zeta_i + \zeta_i \left[ \frac{aM_1}{4}(2 - \alpha) + \frac{1}{18}(aM_3 - M_1)(3 - \alpha^2) \right. \\
& + \frac{1}{46}(aM_5 - M_3)(4 - \alpha^3) + \frac{1}{100}(aM_7 - M_5)(5 - \alpha^4) - \frac{M_7}{180} \\
& \cdot (6 - \alpha^5) \left. \right] - \zeta_0 \left[ \frac{m_{1i}}{8}(2 - \alpha) + \frac{m_{3i}}{36}(3 - \alpha^2) + \frac{m_{5i}}{92}(4 - \alpha^3) \right. \\
& + \frac{m_{7i}}{200}(5 - \alpha^4) \left. \right] + \left[ \frac{am_{1i}}{4}(2 - \alpha) + \frac{1}{18}(am_{3i} - m_{1i})(3 - \alpha^2) \right. \\
& + \frac{1}{46}(am_{5i} - m_{3i})(4 - \alpha^3) + \frac{1}{100}(am_{7i} - m_{5i})(5 - \alpha^4) \\
& \left. - \frac{m_{7i}}{180}(6 - \alpha^5) \right] \left( \sum_{k=0}^i \zeta_k \right)
\end{aligned} \quad (7.87)$$

式中,  $M_j (j=1, 2, 3, 4)$ 、 $m_{ji} (j=1, 2, 3, 4)$  为与挠度的前  $i-1$  项之和有关的量;  $\alpha$  为与边界有关的参数,如果壳边缘固支,则  $\alpha=1$ 。简化式(7.87),可列出每步荷载  $q^*$  与挠度  $\zeta_i$  的关系为

$$\begin{aligned}
q^* = & \frac{16}{3(1 - \mu^2)}\zeta_i - \lambda_1 \zeta_i^2 \zeta_0 - \lambda_2 \zeta_0^2 \zeta_i - \lambda_3 \zeta_0 \zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \\
& + \lambda_4 \zeta_0 \zeta_i^2 + \lambda_5 \zeta_i^3 + \lambda_6 \zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k + \lambda_7 \zeta_0 \zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \\
& + \lambda_5 \zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k^2 + \lambda_6 \zeta_i \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k + \lambda_4 \zeta_0 \zeta_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k \\
& + \lambda_5 \zeta_i^2 \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k + \lambda_6 \zeta_i \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k
\end{aligned} \quad (7.88)$$

式中,各常数分别计算如下:

$$\lambda_1 = 1.46 - 0.67\nu \quad \lambda_4 = -3.25 - 1.48\nu$$

$$\lambda_2 = -2.57 - 1.34\nu \quad \lambda_5 = 1.96 - 4.44\nu$$

$$\lambda_3 = 0.1 + 0.04\nu \quad \lambda_6 = 3.92 + 1.5\nu$$

如果步长取得很小,则每步下的荷载与挠度也很小,则 $\zeta_i^2, \zeta_i^3$ 属高阶小量;可以略去。再于式(7.88)两边取 $i$ 项之和,利用求和公式

$$\sum_0^i q_i = Q \quad \sum_0^i \zeta_i = \zeta \quad \sum_0^i \zeta_i \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j = \frac{1}{2} \zeta^2$$

$$\sum_0^i \zeta_i \left( \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^2 = \frac{1}{3} \zeta^3 \quad \sum_0^i \zeta_i \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \sum_{k=0}^{j-1} \zeta_k = \frac{1}{6} \zeta^3$$

得到

$$Q = \frac{16}{3(1-\mu^2)} \zeta - \lambda_2 \zeta_0^2 \zeta - \lambda_3 \zeta_0 \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) + \lambda_4 \zeta_0 \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right)$$

$$+ \lambda_5 \left( \frac{1}{6} \zeta^3 \right) + \lambda_4 \zeta_0 \zeta^2 + \lambda_6 \left( \frac{1}{3} \zeta^3 \right)$$

即

$$B_3 \zeta^3 - B_2 \zeta_0 \zeta^2 + (B_1 \zeta_0^2 + B_0) \zeta = Q \quad (7.89)$$

其中

$$B_3 = 0.5 \lambda_6 = 1.96 + 0.74\nu$$

$$B_2 = 0.5 \lambda_5 - 1.5 \lambda_4 = 4.96 + 2.24\nu$$

$$B_1 = -\lambda_2 = 2.57 + 1.34\nu$$

$$B_0 = \frac{16}{3(1-\mu^2)}$$

式(7.89)是一个三次代数方程,求出 $\zeta$ 值也就得到变形的挠度值 $w = f\left(\alpha - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2$ 。再由挠度与内力公式

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad (7.90)$$

$$V_r = -D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w)$$

可以求出各有矩内力。

将 $w$ 的表达式代入式(7.65)中的第二式,积分之后可求出应力函数 $\phi$ ,并能求出壳中的薄膜内力,为

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{h}{r} \frac{d\phi}{dr} \\ N_\theta &= h \frac{d^2 \phi}{dr^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.91)$$

如果按小挠度变形计算球形扁壳结构,其计算公式为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w + w &= \frac{qR^2}{Eh} \\ \nabla^2 \phi &= \frac{Ehr_0^2}{R} w \end{aligned} \right\} \quad (7.92)$$

这样一组方程可用零阶 Tomson 函数求解。在球壳周边固支条件下,其解为

$$\begin{aligned} w &= \frac{qr_0^2}{Eh} \left( \frac{\text{bei}'\beta_0 \text{ber}\beta - \text{ber}'\beta_0 \text{bei}\beta}{\text{bei}\beta_0 \text{ber}'\beta_0 - \text{ber}\beta_0 \text{bei}'\beta_0} + 1 \right) \\ \phi &= qRr_0^2 \left( \frac{\text{bei}'\beta_0 \text{bei}\beta + \text{ber}'\beta_0 \text{ber}\beta}{\text{bei}\beta_0 \text{ber}'\beta_0 - \text{ber}\beta_0 \text{bei}'\beta_0} + \frac{\beta^2}{4} \right) \end{aligned}$$

式中,  $r=r_0\beta$ 。

由于 Tomson 函数是表达复杂的无穷级数,收敛较慢。在结构设计中选择 Tomson 函数有限项进行计算,内力会有误差。这里用步进求和法进行计算。

与大挠度方法类似,这里也将挠度与荷载划分若干段,由式(7.92)导出第  $i$  步公式,为

$$\nabla^2 \nabla^2 w_i + w_i = \frac{q_i R^2}{Eh} \quad (7.93)$$

如果壳周边固支,那么选择球形扁壳小挠度变形公式为

$$w_i = f_i \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^2 \quad (7.94)$$

将式(7.94)代入式(7.93),可得最大挠度  $f_i$  公式,为

$$\left( 1 + \frac{64}{r_0^4} \right) f_i = \frac{q_i R^2}{Eh} \quad (7.95)$$

式(7.95)是在每一步变形下结构中最大挠度与荷载增量的关系式,再由求和公式

$$\sum_0^i q_i = q \quad \sum_0^i f_i = f$$

得出

$$f = \frac{qR^2}{Eh \left( 1 + \frac{64}{r_0^4} \right)}$$

最后的挠度式为

$$w = \frac{qR^2}{Eh \left( 1 + \frac{64}{r_0^4} \right)} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^2 \quad (7.96)$$

再由内力公式(7.90)求出有矩内力。由式(7.92)第二式求出  $\phi$ ,由式(7.91)求出壳中的薄膜内力。

为了说明球形扁壳结构计算中步进求和方法的优越性,这里用算例分别给出大挠度与小挠度计算结果。

**算例 7.3** 球形扁壳,球半径  $R=92.5\text{m}$ ,矢高  $f_0=5\text{m}$ ,壳厚  $h=0.1\text{m}$ ,下底平行圆半径  $r_0=30\text{m}$ 。采用  $E=25.5\text{kN/mm}^2$ ,  $\mu=\frac{1}{6}$  的混凝土结构,均匀法向荷载  $q=5000\text{N/m}^2$ ,球周边固支。

**解** 列出壳中点及周边的挠度与内力值,为壳中点

$$\text{步进大挠度 } w=0.0144\text{m} \quad N_r=N_\theta=-197.9\text{kN/m} \quad M_r=M_\theta=0$$

$$\text{步进小挠度 } w=0.0168\text{m} \quad N_r=N_\theta=-231\text{kN/m} \quad M_r=M_\theta=0$$

$$\text{Tomson 法 } w=0.0167\text{m} \quad N_r=N_\theta=-231.2\text{kN/m} \quad M_r=M_\theta=0$$

壳边缘

$$\text{步进大挠度 } w=0 \quad M_r=-397\text{kN}\cdot\text{m/m} \quad M_\theta=-188\text{kN}\cdot\text{m/m}$$

$$N_r=-659\text{kN/m}$$

$$\text{步进小挠度 } w=0 \quad M_r=-462\text{kN}\cdot\text{m/m} \quad M_\theta=-219.8\text{kN}\cdot\text{m/m}$$

$$N_r=-770\text{kN/m}$$

显然,用步进小挠度与 Tomson 方法计算的结果很接近,但从公式来看,步进法比 Tomson 法要简单得多。对比大、小挠度计算的结果,结果相差比较大。本书给出的大挠度步进求和公式(7.89)值得在大跨度球形扁壳结构设计时参考。

## 7.4 非线性变壁厚圆柱壳屋盖<sup>1)</sup>

本节讨论的是一种几何非线性圆柱壳——径向变厚度圆柱壳屋盖的结构内力。

图 7.5 是径向非线性变厚度圆柱壳屋盖的图示。壳体厚度方程为

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0(1 + \lambda\phi)^2 \quad (\phi > 0) \\ h &= h_0(-1 + \lambda\phi)^2 \quad (\phi < 0) \end{aligned} \right\} \quad (7.97)$$

式中,  $h_0$  为壳顶厚;  $\lambda$  为影响壳厚变化的因子;  $\phi$  为如图 7.5 所示的壳面任一点的径向夹角。由于该结构具有对称性,以下仅取  $\phi > 0$  时的公式  $h = h_0(1 + \lambda\phi)^2$  进行结构内力推导。式(7.97)表达的径向变厚度圆柱壳,其厚度变化与径向坐标相协调,随角度  $\phi$  的增加呈曲线渐近变化。从提高结构的抗裂性能出发,考虑到内力向有利方向的重分布,采取这种渐变圆柱壳形式作为壳体屋盖是有利的。本节基于圆柱壳屋盖的半无矩理论,对这种径向变厚度圆柱壳结构进行内力分析。

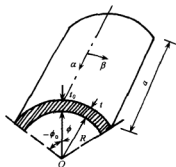


图 7.5 径向变厚度圆柱壳屋盖

1) 贾乃文等,一种径向变厚度圆柱壳屋盖结构分析方法,建筑科学,1998年6期

常厚度圆柱壳的半无矩理论解法,内力表达如图 7.6 所示,但有如下假定:

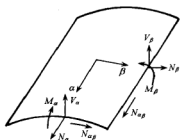


图 7.6 圆柱壳内力

1) 在  $\alpha$  为常量的横截面上,弯矩及扭矩很小,可略去不计,即  $M_\alpha = M_{\alpha\beta} = 0$ 。

2) 可以略去壳中面径向正应变及剪应变,以及曲率的变化,即  $\epsilon_\beta = \nu_{\alpha\beta} = \chi_\beta = 0$ 。

3) 对混凝土结构取泊松比  $\mu = 0$ 。

壳面所受荷载分径向荷载  $Y(\beta)$  和法向荷载  $z(\beta)$ ,按以上假设可组成半无矩理论的平衡方程,为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + Y(\beta) &= 0 \\ -\frac{N_\beta}{R} + \frac{\partial V_\beta}{\partial \beta} + Z(\beta) &= 0 \\ \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} - V_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.98)$$

式中,  $R$  为圆柱壳中心线半径;  $\beta = R\phi$ 。

半无矩理论的几何方程仅有  $u$ 、 $v$ 、 $w$  及  $\epsilon_\alpha$  时可表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= \epsilon_\alpha \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.99)$$

在径向变厚度的情况下,由于壳厚公式  $h = h_0(1 + \lambda\phi)^2$ ,那么由对应的物理关系可得

$$N_\alpha = Eh_0(1 + \lambda\phi)^2 \epsilon_\alpha \quad (7.100)$$

代入几何方程,并积分可得径向位移  $v$ 、纵向位移  $u$  及法向位移  $w$ ,分别为

$$u = \frac{1}{Eh_0(1 + \lambda\phi)^2} \int_0^\alpha N_\alpha d\alpha \quad (7.101)$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\lambda}{REh_0(1 + \lambda\phi)^3} \int_0^\alpha \left( \int_0^\alpha N_\alpha d\alpha \right) d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{Eh_0(1 + \lambda\phi)^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\alpha \left( \int_0^\alpha N_\alpha d\alpha \right) d\alpha \end{aligned} \quad (7.102)$$

$$w = \frac{1}{Eh_0} \left\{ \frac{-6\lambda^2}{R(1+\lambda\phi)^4} \left[ \int_0^a \left( \int_0^a N_s d\alpha \right) d\alpha \right] + \frac{4\lambda}{(1+\lambda\phi)^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \int_0^a \left( \int_0^a N_s d\alpha \right) d\alpha \right] \right. \\ \left. - \frac{R}{(1+\lambda\phi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[ \int_0^a \left( \int_0^a N_s d\alpha \right) d\alpha \right] \right\} \quad (7.103)$$

如果令函数  $N = \int_0^a \left( \int_0^a N_s d\alpha \right) d\alpha$ , 将式(7.103)代入式(7.99)的第4式, 考虑到  $\beta = R\phi$ , 可以求出  $N$  关于  $\phi$  的微分方程, 为

$$- \frac{120\lambda^4}{(1+\lambda\phi)^5} N + \frac{96\lambda^3}{(1+\lambda\phi)^5} \frac{\partial N}{\partial \phi} - \frac{36\lambda^2}{(1+\lambda\phi)^4} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} \\ + \frac{8\lambda}{(1+\lambda\phi)^3} \frac{\partial^3 N}{\partial \phi^3} - \frac{1}{(1+\lambda\phi)^2} \frac{\partial^4 N}{\partial \phi^4} = 0 \quad (7.104)$$

按半无矩理论假设  $M_s = 0$ , 取混凝土结构泊松比  $\mu = 0$ , 可知  $M_\beta$  是与  $\alpha$  无关的。由平衡方程(7.98)中的第4式可判定,  $V_\beta$  也是与  $\alpha$  无关的。

将平衡方程(7.98)中的第1式对  $\alpha$  微分, 平衡方程(7.98)中的第2、3式对  $\beta$  微分, 对比可知  $N_s$  仅含  $\alpha$  的平方项多项式。再由  $\beta = R\phi$ , 可以写出  $N_s$  的函数一般表达式, 为

$$N_s = (A\alpha^2 + B\alpha + D)f(\phi) \quad (7.105)$$

如果选择坐标原点为圆柱壳的几何中点, 柱壳纵长为  $a$ , 在纵向两端有铰支边界条件, 则有  $N_s|_{\alpha=\pm \frac{a}{2}} = 0$ 。由结构荷载对称得  $B = 0$ ,  $N_s$  的一般表达式为

$$N_s = \left[ \alpha^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] f(\phi) \quad (7.106)$$

对应的  $N$  为

$$N = \int_0^a \left( \int_0^a N_s d\alpha \right) d\alpha = \left( \frac{\alpha^4}{12} - \frac{a^2 \alpha^2}{8} \right) f(\phi) \quad (7.107)$$

将式(7.107)代入式(7.105), 可获得关于函数  $f(\phi)$  的 Euler 方程

$$(1+\lambda\phi)^4 \frac{d^4 f}{d\phi^4} - 8\lambda(1+\lambda\phi)^3 \frac{d^3 f}{d\phi^3} + 36\lambda^2(1+\lambda\phi)^2 \frac{d^2 f}{d\phi^2} \\ - 96\lambda^3(1+\lambda\phi) \frac{df}{d\phi} + 120\lambda^4 f = 0 \quad (7.108)$$

取函数代换  $1+\lambda\phi = e^s$ , 将上式转化为关于  $s$  的常系数方程式, 为

$$\frac{d^4 f}{ds^4} - 14 \frac{d^3 f}{ds^3} + 71 \frac{d^2 f}{ds^2} - 154 \frac{df}{ds} + 120f = 0 \quad (7.109)$$

按特征值方法求方程(7.109), 并计入原变量  $\phi$ , 得出  $N_s$  为

$$N_s = \left[ \alpha^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] [c_1 + c_2(1+\lambda\phi) + c_3(1+\lambda\phi)^2 + c_4(1+\lambda\phi)^3] (1+\lambda\phi)^2 \quad (7.110)$$

将式(7.110)代入式(7.101), 可以求出位移  $u$ , 并由几何方程求出  $v, w$ 。如果由对称性条件  $(u, v)|_{\alpha=0, \phi=0} = 0$ , 则位移表示为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{Eh_0} \left( \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{4} \alpha \right) [c_1 + c_2(1 + \lambda\phi) + c_3(1 + \lambda\phi)^2 + c_4(1 + \lambda\phi)^3] \\ v &= -\frac{\lambda}{REh_0} \left( \frac{a^4}{12} - \frac{a^2}{8} \alpha^2 \right) [c_2 + 2c_3(1 + \lambda\phi) + 3c_4(1 + \lambda\phi)^2] \\ w &= \frac{\lambda^2}{REh_0} \left( \frac{a^4}{12} - \frac{a^2}{8} \alpha^2 \right) [2c_3 + 6c_4(1 + \lambda\phi)] \end{aligned} \right\} \quad (7.111)$$

再由式(7.110)代入平衡方程,并进行积分可得内力分别为

$$N_{\phi\phi} = -\frac{2Ra}{\lambda} \left[ \frac{c_1}{3}(1 + \lambda\phi)^3 + \frac{c_2}{4}(1 + \lambda\phi)^4 + \frac{c_3}{5}(1 + \lambda\phi)^5 + \frac{c_4}{6}(1 + \lambda\phi)^6 + c_5 \right] \quad (7.112)$$

$$N_{\theta} = -R \int Y(\beta) d\phi + \frac{2R^2}{\lambda^2} \left[ \frac{c_1}{12}(1 + \lambda\phi)^4 + \frac{c_2}{20}(1 + \lambda\phi)^5 + \frac{c_3}{30}(1 + \lambda\phi)^6 + \frac{c_4}{42}(1 + \lambda\phi)^7 + c_5(1 + \lambda\phi) + c_6 \right] \quad (7.113)$$

$$V_{\theta} = -R \left[ \int Y(\beta) d^2\phi - R \int Z(\beta) d\phi + \frac{2R^2}{\lambda^3} \left[ \frac{c_1}{60}(1 + \lambda\phi)^5 + \frac{c_2}{120}(1 + \lambda\phi)^6 + \frac{c_3}{210}(1 + \lambda\phi)^7 + \frac{c_4}{336}(1 + \lambda\phi)^8 + \frac{c_5}{2}(1 + \lambda\phi)^2 + c_6(1 + \lambda\phi) + c_7 \right] \right] \quad (7.114)$$

$$M_{\theta} = -R^2 \left[ \iint Y(\beta) d^3\phi - R^2 \iint Z(\beta) d^2\phi + \frac{2R^3}{\lambda^4} \left[ \frac{c_1}{360}(1 + \lambda\phi)^6 + \frac{c_2}{840}(1 + \lambda\phi)^7 + \frac{c_3}{1680}(1 + \lambda\phi)^8 + \frac{c_4}{3024}(1 + \lambda\phi)^9 + \frac{c_5}{6}(1 + \lambda\phi)^3 + \frac{c_6}{2}(1 + \lambda\phi)^2 + c_7(1 + \lambda\phi) + c_8 \right] \right] \quad (7.115)$$

以上各式中的积分常数  $c_1 \sim c_8$  可由边界上的位移及内力条件确定。

如果圆柱壳屋盖纵边自由,环向两端铰支,则有边界条件

$$(N_{\theta}, N_{\phi\theta}, V_{\theta}, M_{\theta})|_{\theta=\pm\theta_0} = 0$$

考虑结构与荷载的对称性,则有系数  $c_2 = c_4 = c_6 = c_7 = 0$ , 以上待定常数减少到四个。如果圆柱壳四周周边铰支,则有边界条件

$$(N_{\phi\theta}, v, w)|_{\alpha=\pm\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$M_{\theta}|_{\theta=\pm\theta_0} = 0$$

据此可以求出其他的待定常数。

在  $\phi < 0$  时,应将以上内力公式用  $(-1 + \lambda\phi)$  代换,即得出对应点的内力。求得壳中内力之后,由此可以进行该结构的结构设计。

**算例 7.4** 设有中心线半径  $R=4\text{m}$  的变厚度圆柱壳屋盖结构,厚度变化系数



$\lambda=0.2$ , 壳顶厚  $t_0=8\text{cm}$ , 该壳为半圆截面, 则壳底厚  $h=13.8\text{cm}$ 。壳纵向全长  $16\text{m}$ 。按屋面承受  $4\text{kN/m}^2$  的结构自重及外荷载的水平均布竖向荷载考虑, 那么有  $Y(\beta)=4\sin\phi\text{kN/m}$ ,  $Z(\beta)=4\cos\phi\text{kN/m}$ 。

**解** 由内力表达式及边界条件可求内力待定系数为

$$c_1=0.35 \quad c_3=-0.34 \quad c_6=-0.01$$

$$c_2=c_4=c_5=c_7=0 \quad c_8\approx 0$$

壳屋盖的内力公式为

$$N_\alpha = (\alpha^2 - 64)[0.35 - 0.34(1 + \lambda\phi)^2](1 + \lambda\phi)^2$$

$$N_{\alpha\beta} = -40\alpha[0.12(1 + \lambda\phi)^3 - 0.07(1 + \lambda\phi)^2]$$

$$N_\beta = [23.23(1 + \lambda\phi)^4 - 9.07(1 + \lambda\phi)^6 - 23.36] - R \int Y(\beta) d\phi$$

$$V_\beta = [23.23(1 + \lambda\phi)^5 - 6.48(1 + \lambda\phi)^7 - 36.8(1 + \lambda\phi)]$$

$$- R^2 \iint Y(\beta) d^2\phi - R \int Z(\beta) d\phi$$

$$M_\beta = [77.78(1 + \lambda\phi)^6 - 16.19(1 + \lambda\phi)^8 - 368(1 + \lambda\phi)^2]$$

$$- R^2 \iiint Y(\beta) d^3\phi - R^2 \iint Z(\beta) d^2\phi$$

显然, 由于壳体厚度随  $\phi$  的增加而加厚, 在底边处相当于增设了一道边梁, 使结构有较好的抗弯、抗裂性能, 减少了结构的挠度变形, 避免了另外设置边梁带来梁壳连接处的内力突变。壳的厚度随  $\phi$  增加而增加的渐变, 与径向荷载  $Y(\beta)$  的增加相协调, 与  $N_\beta$  的增加相协调, 有一定的经济效果。

## 7.5 扁壳结构塑性极限分析

本节研究扁壳结构的塑性极限分析。假设扁壳的中面方程是椭圆抛物面形状, 曲面方程为

$$z = f \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (7.116)$$

式中,  $f$  为周边两个方向的矢高, 并且这两个高度是相等的。

另外考虑扁壳结构周边为铰支承, 承受均匀竖向荷载, 在壳中面上配置方格状钢筋网的情况。采用机动法对扁壳破坏进行分析, 给出如图 7.7 所示的破坏机构。

在此破坏机构中, 中性平面在壳曲面上轨迹的投影为一椭圆, 其顶点位于  $d$  与  $e$  以及对应点上。根据壳体中曲面方程, 得出两相邻刚性板之间的相互转角为

$$\phi_{15} = \phi_{35} = \frac{1}{\nu a} \quad \phi_{25} = \phi_{45} = \frac{1}{\nu b}$$

$$\phi_{12} = \phi_{23} = \phi_{34} = \phi_{41} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\nu ab}$$

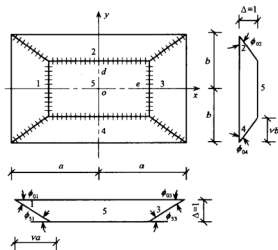


图 7.7 扁壳破坏机构

屈服线 2-3 可表达成

$$z = f \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$y = \frac{b}{a} x$$

将上两式消去  $y$ , 得出屈服线在  $xoz$  平面上的投影, 为

$$z_{23} = 2f \frac{x^2}{a^2}$$

通过屈服线 2-3 的钢筋所作的内力功为

$$W_{23} = A_s f_y \phi_{23} \int_{s_1}^{s_2} (z_{23} - z_n) ds \quad (7.117)$$

式中,  $s_1, s_2$  分别为屈服线起点和终点的坐标;  $z_n$  为壳体水平中性平面方程, 为

$$z_n = f(1 - \nu)^2$$

求出积分项后, 得出

$$W_{23} = A_s f_y \frac{(a^2 + b^2)}{3ab} (3 - \nu^2) \quad (7.118)$$

类似地, 屈服线 5-3 的方程为

$$z = f \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$x = a(1 - \nu)$$

通过屈服线 5-3 的钢筋所作的内力功为

$$W_{53} = A_s f_y \phi_{53} \int_{-(1-\nu)b}^{(1-\nu)b} (z_{53} - z_n) dy \quad (7.119)$$

式中,  $z_{53}$  表示屈服线 5-3 投影在  $yoz$  平面上的方程, 其表达式为

$$z_{53} = f[(1 - \nu)^2 + \frac{y^2}{b^2}]$$

代入内功表达式(7.119)中, 得出

$$W_{53} = \frac{2A_i f_y}{3} f \frac{b}{a} \frac{(1 - \nu)^3}{\nu} \quad (7.120)$$

屈服 5-2 的方程为

$$z = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$y = b(1 - \nu)$$

求出屈服线 5-2 投影在  $xoz$  平面上的方程为

$$z_{52} = f\left[\frac{x^2}{a^2} + (1 - \nu)^2\right]$$

通过屈服线 5-2 的钢筋所做的内力功为

$$\begin{aligned} W_{52} &= A_i f_y \int_{-(1-\nu)a}^{(1-\nu)a} (z_{52} - z_a) dx \\ &= \frac{2A_i f_y}{3} f \frac{a}{b} \frac{(1 - \nu)^3}{\nu} \end{aligned} \quad (7.121)$$

这样, 扁壳所做的总内力功为

$$\begin{aligned} W &= 4W_{23} + 2W_{53} + 2W_{52} \\ &= \frac{4}{3} A_i f_y \frac{f(1 + \lambda^2)}{\lambda} \frac{1 + 3\nu^2 - 2\nu^3}{\nu} \end{aligned} \quad (7.122)$$

式中,  $\lambda = \frac{a}{b}$ 。

垂直均匀荷载所做的外力功为

$$V = \frac{4}{3} q b^2 \lambda (3 - 3\nu + \nu^2) \quad (7.123)$$

令  $W=V$ , 则有

$$q = A_i f_y \frac{f}{a^2} (1 + \lambda^2) \frac{1 + 3\nu^2 - 2\nu^3}{\nu(3 - 3\nu + \nu^2)} \quad (7.124)$$

求极限荷载  $q$ , 令  $\frac{dq}{d\nu} = 0$ , 得

$$\nu^4 - 4\nu^3 + 2\nu^2 + 2\nu - 1 = 0$$

求此方程, 得  $\nu = 0.46$ , 那么  $q$  值为

$$q = 1.709(1 + \lambda^2) A_i f_y \frac{f}{a^2} \quad (7.125)$$

对两相邻周边具有不等矢高的双曲扁壳, 其壳中面方程为

$$z = f_1\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + f_2\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = f_1\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{\phi} \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (7.126)$$

式中,  $f_1$ 、 $f_2$  分别为沿  $x$  边和  $y$  边的抛物线矢高;  $\psi = \frac{f_1}{f_2}$ 。

用机动分法分析该扁壳的塑性极限荷载, 破坏机构也如图 7.7 所示, 其中性平面的高度方程  $z_n$  为

$$z_n = f_1(1 - \nu)^2$$

设壳体厚为  $h$ , 壳内设置方格状钢筋网, 单位长度内的钢筋截面积为  $A_t$ ; 单位长度内的斜向钢筋截面积为  $A_d = \mu A_t$ , 斜向钢筋正交于壳体矩形底平面的对角线。此外, 在沿壳周边设置连续钢筋, 其截面积  $A_k = n_k A_t$ , 周边连续钢筋距壳体底平面的距离为  $t$ 。

所有通过屈服线的钢筋所做的内力功为

$$W = \sum_r \phi_r \left[ A_t f_y \int_{s_1}^{s_2} (z_r - z_n) ds + A_d f_y \int_{s_1}^{s_0} (z_r - z_n) ds + A_k f_y (z_k - z_{nk} + t) \right] \quad (7.127)$$

式中,  $\phi_r$  为第  $r$  条屈服线转角;  $z_r$  为第  $r$  条屈服线方程;  $z_{nk}$  为壳顶距中性平面的高度;  $z_k$  为顶点距壳角点的高度;  $s_0$  为配置有附加斜向钢筋的屈服线终点坐标。

垂直均布荷载的外力功  $V$  为

$$V = \frac{4}{3} q b^2 \lambda (3 - 3\nu + \nu^2) \quad (7.128)$$

令  $W = V$ , 则荷载  $q$  为

$$q = A_t f_y \frac{f_1}{a^2} \frac{2U_2}{\nu \xi [3(2 - \nu) - \xi(3 - 2\nu)]} \quad (7.129)$$

式中

$$(1 - \nu)^2 = \frac{1}{\psi} (1 - \xi)^2$$

$$\begin{aligned} U_2 = & (1 + \mu)(\lambda^2 \nu^2 + \xi^2) [\nu(3 - 2\nu) + \frac{1}{\psi} (3 - 3\xi + \xi^2)] \\ & - \lambda^2 \nu (1 - \nu) [2(1 - \nu)^2 - \frac{3}{\psi} (1 - \xi)^2] + \frac{1}{\psi} \xi (1 - \xi)^2 \\ & + 0.25 \alpha \sqrt{\lambda^2 \nu^2 + \xi^2} [1 + \frac{1}{\psi} + \eta_k - (1 - \nu)^2] \end{aligned}$$

$$\eta_k = \frac{t}{f_1} \quad \alpha = \frac{12n_k}{b}$$

根据  $\frac{\partial q}{\partial \nu} = 0$ ,  $\frac{\partial q}{\partial \xi} = 0$  的条件可以确定出  $\nu$  和  $\xi$  值, 然后将  $\nu$  和  $\xi$  再代回到  $q$  式中, 即可求出该双曲扁壳的极限荷载  $q$  值。

对于  $\lambda = \frac{a}{b} = 1$  的双曲扁壳, 斜向屈服线的方向与壳曲面对角线方向重合, 破坏机构图形只取决于一个参数  $\nu$ ; 如果壳体周边没有配置连续钢筋,  $n_k = 0$ , 这时的  $q$

可表示为

$$q = A_1 f_y \frac{f}{a^2} \frac{2[(1+\mu)\nu(3-\nu^2) + (1-\nu)^3]}{\nu[3(1-\nu) + \nu^2]} \quad (7.130)$$

令  $\frac{dq}{d\nu} = 0$ , 得出

$$(1+\mu)\nu^2(3-4\nu+\nu^2) - (1-\nu)^2 = 0$$

如果在壳体周边没有设置连续钢筋, 同时在四角区域又没设置附加斜向钢筋, 那么上式为

$$\nu^4 - 4\nu^3 + 2\nu^2 + 2\nu - 1 = 0$$

该方程有根  $\nu = 0.46$ 。令  $\mu = 0$ , 则有

$$q = 3.42 A_1 f_y \left( \frac{f}{a^2} \right) \quad (7.131)$$

上式表示在不设附加斜向钢筋和周边连续钢筋的条件下, 正方形底面双曲扁壳的塑性极限荷载。

## 7.6 双曲抛物壳的塑性极限分析

图 7.8 为双曲抛物壳结构, 虚线表达的是坐标平面。A' 点变到 A 点的高度为 h, 虚线坐标平面上的一点 p'(x, y, 0) 对应实线平面上的一点 p(x, y, z), 则 p p' 的高度为 z。z 对 x 等于常数直线上的点与 y 成比例; 对 y 等于常数直线上的点与 x 成比例。故抛物壳面方程为

$$z = \frac{h}{ab} xy \quad (7.132)$$

式中, a, b 分别为 A'B 与 A'C 的长度。

按薄膜理论计算, 其方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y &= 0 \\ N_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - q_x \frac{\partial z}{\partial y} - q_y \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.133)$$

由式(7.132)可以求出  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{h}{ab}$ 。

如果仅计算抛物壳的垂直荷载  $q_x$ , 则有

$$N_x = N_y = 0$$

$$N_{xy} = -\frac{q_x ab}{2h}$$

一般地, 引入应力函数  $\phi$ , 可以解出

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \int q_x dx \\ N_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \int q_y dy \\ N_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7.134)$$

属于双曲壳屋面结构另一种常见类型是如图 7.9 所示的椭圆平面双曲壳。其壳面高度方程为

$$z = \frac{h}{ab}xy \quad (7.135)$$

而在平面上的椭圆方程为

$$\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} = 1 \quad (7.136)$$

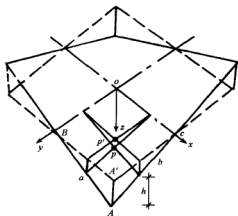


图 7.8 双曲抛物壳

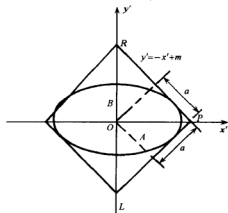


图 7.9 椭圆平面双曲壳

如果取  $a=b$ , 那么高度方程为  $z = \frac{h}{a^2}xy$ 。

双曲壳的边  $PR$ 、 $PL$  线与椭圆相切, 并与  $x'$  轴成  $45^\circ$  夹角, 那么  $PR$  关于  $x'$  轴与  $y'$  轴的方程可写为

$$y' = -x' + \sqrt{2}a \quad (7.137)$$

将式(7.137)代入式(7.136)中, 可以找出椭圆长、短半轴与双曲壳长度  $a$  的关系, 为

$$\frac{x'^2}{A^2} + \frac{(-x' + \sqrt{2}a)^2}{B^2} = 1 \quad (7.138)$$

因为  $PR$  与椭圆相切,  $x'$  在屋盖高度上为零, 因此  $a$  可由上式中  $A$  和  $B$  计算出来。椭圆的边界高度在选择双曲面高度之后也可比较方便地计算出来。

**算例 7.5** 有一椭圆双曲壳面,其中椭圆长轴为 37.5m,短轴为 25m,壳厚度为 8cm,壳高  $h=5.2\text{m}$ ,并假设沿边界有刚性梁支承于墙上,求  $a, b$  的长度及壳内力。

**解** 按式(7.138)可以写出

$$\frac{4x'^2}{37.5^2} + \frac{4y'^2}{25^2} = 1$$

即有

$$x'^2 + 2.25y'^2 = 351.6$$

如图 7.9 所示,有斜边方程

$$y' = -x' + m$$

代入前式,则有关于  $x'$  的二次方程

$$x'^2 + 2.25(x'^2 - 2mx' + m^2) = 351.6$$

即

$$3.25x'^2 - 4.5mx' + (2.25m^2 - 351.6) = 0$$

因为与椭圆相切的是一直线,所以有

$$20.25m^2 - 13(2.25m^2 - 351.6) = 0$$

即

$$m = 22.5$$

由此得

$$a = \frac{m}{\sqrt{2}} = 15.9\text{m} = b$$

即双曲壳的  $\frac{1}{4}$  长度。

如果每单位面积垂直荷载为  $2850\text{N/m}^2$ ,则剪力  $N_{xy}$  为

$$N_{xy} = \frac{2850 \times 15.9^2}{2 \times 5.2} = 69.28\text{kN/m}$$

这里顺便指出:椭圆周边的边梁除受到垂直荷载产生的竖向力之外,还有由剪力  $N_{xy}$  产生的内推和外推力,并且有  $N=69.28\text{kN/m}$  的集度,可按此内力进行边梁的结构设计。

如图 7.10 所示为双曲抛物壳的两种极限破坏形式,(a)图中  $A, C$  点为高点自由,  $B, D$  点为低点固定;(b)图中四点均为固定,  $A, C$  为高点。(a)图形式的极限状态屈服线被称为悬臂式屈服线,而(b)图形式的极限状态屈服线被称为拱状屈服线。

悬臂式屈服线的极限分析比较简单的情况如图 7.11 中的(a)图所示。假设屈服沿对角线发生,应力呈

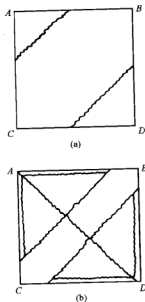


图 7.10 双曲抛物壳面壳极限图

抛物线形变化。如果在最大拉伸区达到了屈服点,而在边梁的压应力达到了  $P_c$ ,如图 7.11 中的(c)图所示,压应力的总量集中在边梁。由平衡方程得

$$2 \frac{2}{3} f_a A_a x_0 = 2 P_c \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \quad (7.139)$$

如果代入

$$P_c \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} H_c \quad (7.140)$$

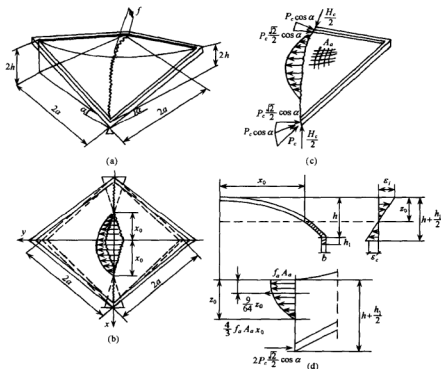


图 7.11 悬臂式屈服线的双曲抛物壳

式中,  $H_c$  为水平推力,有

$$f_a A_a = \frac{3 H_c}{4 x_0} \quad (7.141)$$

式中,  $x_0$  为半拉伸区长度。依据平截面假定确定中性轴,从图 7.11 中(d)图可得

$$Z_0 = \frac{\epsilon_i \left( h + \frac{h_1}{2} \right)}{\epsilon_i + \epsilon_c} \quad (7.142)$$

式中,  $\epsilon_i$  为拉伸区的应变,其值为

$$\epsilon_i = \frac{f_a}{E_a} \quad (7.143)$$



而  $\epsilon_c$  为混凝土压缩的应变,其值为

$$\epsilon_c = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P_c \cos \alpha}{E_0 b h} = \frac{H_c}{2 E_0 b h} \quad (7.144)$$

式中,  $E_s$ 、 $E_0$  分别为钢筋混凝土与混凝土的弹性模量。

从  $Z_0$  的表达式,可以进而推得

$$Z_0 = \frac{h + \frac{h_1}{2}}{1 + \frac{n}{2} \frac{H_c}{f_0 b h}} \quad (7.145)$$

式中,  $n = \frac{E_s}{E_0}$ 。如图 7.11 中(d)图所示,中性轴中的长度  $x_0$  是从壳角量起并且是有限的。满足壳面的抛物方程沿壳对角线为

$$Z = \frac{h}{2a^2} x'^2 \quad (7.146)$$

其中,  $x_0 = \sqrt{2} a \sqrt{\frac{Z_0}{h}}$ 。拉伸力的总的长度是  $x' = \frac{3}{8} x_0$ ,按上式计算得

$$Z_G = \frac{9}{64} Z_0 \quad (7.147)$$

按拉伸区的形心的有矩平衡,可得

$$\begin{aligned} M_0 &= \left( h + \frac{h_1}{2} - \frac{9}{64} Z_0 \right) 2P_c \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \\ &= H_c \left( h + \frac{h_1}{2} - \frac{9}{64} Z_0 \right) \end{aligned} \quad (7.148)$$

利用外加荷载关系

$$M_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} p a^3 + 2\sqrt{2} g a^2 \quad (7.149)$$

式中,  $p$  为单位面积分布荷载;  $g$  为边梁的自重。由以上两式平衡得出

$$H_c \left( h + \frac{h_1}{2} - \frac{9}{64} Z_0 \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} p a^3 + 2\sqrt{2} g a^2 \quad (7.150)$$

再将  $Z_0$  代入上式中,可以分别求出  $H_c$  和  $Z_0$ 。

图 7.12 表达了四角支承的双曲抛物壳的拱型破坏极限,给出了混凝土压缩的屈服线和钢筋拉伸的屈服线。假定边界及靠近角部区域不会压碎破坏。壳的中心被分成 6 个平面部分。最大荷载是

$$P = \frac{h}{a^2} f_a A_a \psi(\xi, \bar{n}, \epsilon) \quad (7.151)$$

式中

$$\psi(\xi, \bar{n}, \epsilon) = \frac{[3(1 - \xi)^3 + \xi^2] \bar{n}^2 + \mu \xi^2 + \frac{3\xi}{\epsilon}}{\xi^2 (\xi^2 - 3\xi + 3)}$$

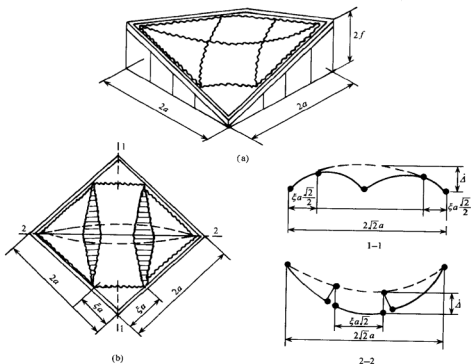


图 7.12 拱型屈服线的双曲抛物壳

$$\bar{n} = \frac{f_p \delta}{A_s R_s} \quad \epsilon = \frac{h}{\delta - a'} \quad (7.152)$$

式中,  $a'$  为钢筋拉伸区域;  $\mu$  为实验系数, 它表示屈服线并不全部垂直主应力, 对薄壳它的值在 1.4~1.7 之间。

荷载最小值由条件  $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0$  确定。从这里可得出  $\xi = 0.7$ , 这样

$$\psi_{\min} = 0.74\bar{n} + 0.64\mu + \frac{2.25}{\epsilon}$$

$\mu = 1.7$  对双曲抛物壳极限分析来说是推荐值, 做了 7 种以上模型实验与此理论都吻合, 其屈服表现如图 7.12(b) 所示。

**算例 7.6** 有一双曲抛物壳,  $2a = 12\text{m}$ ,  $h = 1.2\text{m}$ ,  $\delta = 0.06\text{m}$ ,  $b \times h = 0.2\text{m} \times 0.4\text{m}$ ,  $f_s = 21\text{kN/cm}^2$ , 均布荷载  $p = 4000\text{N/m}^2$ , 边梁自重  $g = 2000\text{N/m}$ 。

**解** 对悬臂式屈服线, 可得

$$n = 6.65$$

由悬臂式屈服线公式得

$$1680 \times 10^3 Z_0 + 3.325 H_c Z_0 = 1680 \times 10^3 \times 140$$

$$140 H_c - \frac{9}{64} H_c Z_0 = 10.350 \times 10^3$$

反复代入,求解以上两式,得出

$$H_c = 966 \text{ kN} \quad Z_0 = 94.5 \text{ cm}$$

再由公式推出

$$x_0 = 7.52 \text{ m} \quad A_s = 4.58 \text{ cm}^2/\text{m}$$

上式表示壳中心的受拉钢筋,它可以由距离  $x_0$  的抛物性质来推求。总的钢筋面积为

$$A_t = 2 \times \frac{2}{3} \times 4.5 \times 7.53 = 45.2 \text{ cm}^2$$

如果按薄膜理论计算,考虑边拱的重量均匀分布,得

$$p' = p + \frac{4g \cdot 2a}{4a^2} = p + \frac{2g}{a} = 4370 \text{ kN/m}^2$$

由此得

$$H_c = \sqrt{2} \frac{pa^2}{2g} = 11000 \text{ kN}$$

这比强度最大的状态大 15%,这时钢筋面积为

$$A'_s = \frac{pa^2}{2hf_s} = 3.12 \text{ cm}^2/\text{m}$$

这比强度最大状态时小,但它沿对角线全长分布,总的钢筋面积为

$$A = 52.9 \text{ cm}^2$$

对于四角刚性支承的双曲抛物壳,产生拱状的屈服线。由薄膜理论计算得

$$n = \frac{130 \times 6}{2100 \times 0.0312} = 11.9 \quad \epsilon = \frac{120}{6 - 1.5} = 26.6$$

取  $\mu = 1.7$ , 由拱状屈服线公式得

$$\psi_{\min} = 0.74 \times 11.9 + 0.64 \times 1.7 + \frac{2.25}{266.6} \approx 10$$

容易看出,上式最后一项即表达壳边弯矩影响项是非常小的,由公式计算出均布荷载为

$$p_r = \frac{120}{600^2} \times 2100 \times 0.0312 \times 10 = 21800 \text{ kN/m}^2$$

这大约是非四周支承荷载的 5 倍。

## 7.7 膜结构及其塑性失稳<sup>1)</sup>

与悬索及索网结构一样,悬膜结构也是大跨度屋面结构形式。悬膜结构是一种大跨度组合结构,一般由刚性悬挂结构和柔性膜体组成。因膜的材料不同,可区分为钢悬挂薄膜与涂层织物的悬挂薄膜两类。对于较大跨度的屋盖,施工安装时须以

1) 汤顺波,贾乃文,悬膜结构塑性失稳破坏计算,空间结构,2001年4期

柔性或劲性的悬挂体系作为钢膜的支承骨架,悬膜结构形成后,膜与这些悬挂体系共同受力,且主要以薄膜抗拉来承受荷载作用。涂层织物悬挂薄膜结构在技术上比钢悬膜结构更为先进,这种悬膜结构的薄膜材料由柔性织物和涂层复合而成,它实际上源于生活中的帐篷。

悬膜结构作为承受拉力的结构,应当进行强度计算和拉伸失稳计算。这里主要对具有幕硬化材料的膜体进行塑性失稳破坏计算。一般在膜受拉力最大处,在某一瞬间拉力导致膜体变薄,结构变形瞬间增大,以至于这时外荷载并不增加反而降低,而膜随之断裂破坏,称之为塑性拉伸失稳破坏。即使对强化型的膜材料,由于膜体变薄,膜内拉应力增大,平衡了强化效应,这种塑性拉伸失稳破坏也会发生。

在分析膜体塑性失稳时,这里采用更一般的,包括弹塑性变形但没有明显屈服表现的幕强化物理关系,以推导一般性的膜体失稳应力。其物理关系为

$$\sigma_i = A(B + \epsilon_i)^n$$

式中,  $A$ 、 $B$ 、 $n$  为材料常数;  $\sigma_i$ 、 $\epsilon_i$  分别为应力强度和应变强度,用主应力与主应变分别表示为

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (7.153)$$

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (7.154)$$

### 7.7.1 圆底球形膜

按薄壳的薄膜理论,膜所受张力在两个正交方向的值分别为  $N_1$ 、 $N_2$ , 如以  $r_1$ 、 $r_2$  表示曲面的两个主曲率半径,在外荷载作用下,控制方程为

$$\frac{\partial(N_1 r)}{\partial \phi} - N_2 r_1 \cos \phi + q_\phi r r_1 = 0 \quad (7.155)$$

$$\frac{N_1}{r_1} + \frac{N_2}{r_2} = q_n \quad (7.156)$$

式中,  $\phi$  为从悬膜结构中心量起的任一矢径的幅角变量;  $q_\phi$ 、 $q_n$  分别为作用于膜上的外荷载的  $\phi$  向分量与法向分量。

对球形膜体,  $r_1 = r_2 = R$ 。将式(7.156)写成  $N_2$  的表达式并代入式(7.155)中,注意到  $r = R \sin \phi$ , 得关于  $N_1$  的微分方程为

$$\frac{\partial N_1}{\partial \phi} + 2N_1 \operatorname{ctg} \phi = -qR \operatorname{ctg} \phi$$

式中,  $q$  为水平外荷载。这一线性微分方程的解为

$$N_1 = -\frac{1}{2}qR + \frac{c}{\sin^2 \phi}$$

如果膜为连续体,在  $\phi=0$  即膜几何中心处时  $N_1$  应为有限值,故必有常数  $c=0$ 。所以解得

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{2}qR \\ N_2 &= -\frac{1}{2}qR\cos 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (7.157)$$

因为  $|N_1| > |N_2|$ , 故应以  $N_1$  方向为控制内力方向。设膜厚为  $h$ , 则有  $N_1 = \sigma_1 h$ 。从式(7.157)中得

$$q = -\frac{2\sigma_1 h}{R} \quad (7.158)$$

由拉伸失稳条件  $dq=0$ , 式(7.158)得

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{dR}{R} - \frac{dh}{h} \quad (7.159)$$

按几何变形关系以及球形膜中心  $N_1 = N_2$ , 得

$$d\epsilon_3 = \frac{dh}{h} \quad d\epsilon_1 = \frac{dR}{R} \quad d\epsilon_2 = d\epsilon_1$$

代入式(7.159)中, 得

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\epsilon_1 - d\epsilon_3$$

按式(7.153)与式(7.154), 从上式可得

$$\frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i} = \frac{3\sigma_i}{2}$$

再代入材料的强化关系式(7.152), 可求失稳时的应力与应变为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= A \left( \frac{2}{3}n \right)^n \\ \epsilon_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3}n - B \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.160)$$

悬膜结构可由上式从应力与变形两个方面进行膜的稳定性设计, 选择材料或控制外力。

## 7.7.2 圆底非球形膜

对于悬膜结构的另一种常见形式, 即圆形底面, 但膜不成球形, 例如呈抛物面状, 其几何关系如图 7.13 所示。

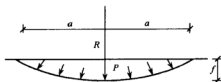


图 7.13 圆底非球形膜

结构的几何中心可视为球面, 但这一球面半径  $R$  可表示为

$$R = \frac{a^2}{2f} \quad (7.161)$$

分析式(7.157)的应力,在结构几何中心的膜底处,应力最大,并有  $N_2 = N_1$ 。根据应变增量表达,则有

$$d\epsilon_1 = d\epsilon_\theta = \frac{df}{R} \quad (7.162)$$

综合式(7.161)与式(7.162),有

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{f^2}{a^2} \quad (7.163)$$

由塑性变形不可压缩条件,可得厚度方向的应变为

$$\epsilon_3 = \epsilon_t = -\frac{2f^2}{a^2} \quad (7.164)$$

设悬膜结构中心受正压力  $P$  作用,根据力的平衡关系有

$$P = \frac{2\sigma_1 h}{R}$$

由失稳条件  $dP=0$ ,得

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{dh}{R} - \frac{dh}{h} \quad (7.165)$$

按瞬时几何关系,可方便地计取厚度方向的变形为

$$d\epsilon_3 = -\frac{dh}{h}$$

将式(7.165)改写为

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_3} = 1 + \frac{1}{R} \frac{dh}{d\epsilon_3} \quad (7.166)$$

将式(7.162)~(7.164)代入式(7.166),得

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_3} = 1 - \frac{1}{R} \frac{dR/df}{d\epsilon_3/df} \quad (7.167)$$

比较式(7.162)与式(7.164),得

$$\frac{\epsilon_3}{R} = \frac{4f^3}{a^4}$$

即有

$$\frac{8h^3}{a^4} = \frac{2\epsilon_3}{R}$$

代入式(7.165),得

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_3} = 1 - \frac{1}{2\epsilon_3} \quad (7.168)$$

因为  $R \gg h$ , 因此  $\sigma_3 = -P$ , 与  $\sigma_1$  相比很小,可以略去,按式(7.153)与式(7.154),可求出

$$\sigma_i = \sigma_1 \quad \epsilon_i = \epsilon_3$$

采用式(7.152)的幂硬化材料, 求出

$$\frac{d\sigma_1}{d\epsilon_3} = An(B + \epsilon_3)^{n-1} \quad (7.169)$$

将式(7.169)代入式(7.168), 得出关于  $\epsilon_3$  之方程为

$$2\epsilon_3^2 + (2B - 2n - 1)\epsilon_3 - B = 0$$

求出  $\epsilon_3$ , 为

$$\epsilon_3 = \frac{-(2B - 2n - 1) \pm \sqrt{(2B - 2n - 1)^2 + 8B}}{4}$$

膜失稳控制应力和应变在径向为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= A(B + \epsilon_3)^n \\ \epsilon_1 &= \frac{1}{2}\epsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.170)$$

### 7.7.3 非圆底浅膜

如图 7.14 所示, 以直角坐标  $xy$  表示底平面, 膜任一点的垂度为  $z$ , 膜的空间垂度可表示为

$$z = F(x, y)$$

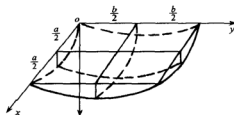


图 7.14 非圆底浅膜

按扁壳薄膜理论平衡方程有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} N_1 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} N_2 &= q \end{aligned} \right\} \quad (7.171)$$

式中,  $q$  为膜面法向荷载。

按双三角级数求解式(7.171), 并按周边简支条件确定积分常数, 可得  $q$  为常数的内力为

$$N_1 = \frac{16qR_x c^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m \left( m^2 + \frac{c^2}{\rho^2} n^2 \right)}$$

$$N_2 = \frac{16qR_y}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left( m^2 + \frac{c^2}{\rho^2} n^2 \right)}$$

$$N_{12} = \frac{16qR_x c}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m^2 + \frac{c^2}{\rho^2} n^2}$$

以上式中

$$c = \frac{a}{b} \quad \rho = \left( \frac{R_x}{R_y} \right)^{\frac{1}{2}}$$

式中,  $R_x, R_y$  分别为  $x, y$  方向的曲率半径。

一般地, 几何中心处即  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$  处是受力最大点, 应对此进行失稳计算。取主项  $m=1, n=1$  进行内力分析, 可知在几何中心处有

$$\left. \begin{aligned} N_{12} &= 0 \\ N_1 &= c^2 N_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.172)$$

取膜厚为  $h$ , 则根据  $dq=0$  的失稳条件得

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{dR_y}{R_y} - \frac{dh}{h} \quad (7.173)$$

与  $\sigma_1 = \frac{N_1}{t}$  相比,  $\sigma_3 = q_0$  很小, 可以略去, 由式(7.153)可得

$$\sigma_i = \sigma_1 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^4}} = \lambda \sigma_1$$

按变形分析  $d\epsilon_1 = \frac{dR_y}{R_y}, d\epsilon_3 = \frac{dh}{h}$ 。根据塑性变形增量理论, 有

$$\begin{aligned} d\epsilon_2 = \frac{s_2}{s_1} d\epsilon_1 &= \frac{\sigma_2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} d\epsilon_1 \\ &= \frac{2 - c^2}{-1 + 2c^2} d\epsilon_1 = \lambda_1 d\epsilon_1 \end{aligned} \quad (7.174)$$

由塑性变形体积不可压缩性, 可得

$$d\epsilon_3 = -d\epsilon_1 - d\epsilon_2 = (-1 - \lambda_1) d\epsilon_1 \quad (7.175)$$

根据式(7.154), 求出应变强度为

$$d\epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} [1 - \lambda_1 + \lambda_1^2]^{\frac{1}{2}} d\epsilon_1 \quad (7.176)$$



从方程式(7.173)得

$$\frac{d\sigma_i}{\sigma_i} = d\epsilon_1 - d\epsilon_3 = (2 + \lambda_1)d\epsilon_1 = \frac{\sqrt{3}(2 + \lambda_1)}{2\sqrt{1 - \lambda_1 + \lambda_1^2}}d\epsilon_1 \quad (7.177)$$

由幂强化材料式得出微分式

$$\frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i} = \frac{\sigma_i}{\frac{B + \epsilon_i}{n}} \quad (7.178)$$

比较式(7.177)与式(7.178),得  $\epsilon_i$  为

$$\epsilon_i = \frac{2n\sqrt{1 - \lambda_1 + \lambda_1^2}}{\sqrt{3}(2 + \lambda_1)} - B \quad (7.179)$$

据此可计算失稳控制应力和应变,为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{2n\sqrt{1 - \lambda_1 + \lambda_1^2}}{\sqrt{3}(2 + \lambda_1)} \right]^n \\ \epsilon_1 &= \frac{n}{2 + \lambda_1} - \frac{\sqrt{3}B}{2\sqrt{1 - \lambda_1 + \lambda_1^2}} \end{aligned} \right\} \quad (7.180)$$

在给定材料物理常数  $A, B, n$  以及结构几何常数  $a, b$  之后,可以求出各应力  $\sigma_1, \sigma_2$  等,以及各应变  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  等。

## 第八章 空间网壳结构

### 8.1 一般柱壳结构的力学分析

一般柱壳结构通常指非圆柱壳结构。虽然壳面长向与轴线平行,但它的横向截面不是圆,而是其他的二次曲线如椭圆、抛物线等。这样的结构用于屋盖等大跨度结构中,形成柱壳屋盖。

为便于理解壳面中的薄膜内力,现给出如图 8.1 所示的微元,其中图(8.1a)为微元的位置;图(8.1b)为微元的受力,显然对柱壳来说, $r_1 = \infty$ 。

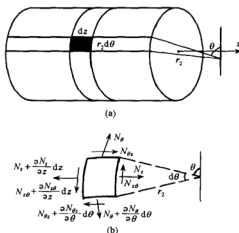


图 8.1 一般柱壳微元

按剪应力互等定理,可知如图 8.1 中的(b)所示  $N_{\theta s} = N_{s\theta}$ 。另设微元体中的体积力在坐标三个方向分别是  $q_x$ 、 $q_\theta$ 、 $q_n$ 。列出微元体在  $z$ 、 $\theta$  和  $n$  方向的平衡条件,可建立相应的平衡方程。

由法向平衡条件可列出

$$-N_\theta dx d\theta + q_n dx (r_2 d\theta) = 0$$

$$N_\theta = q_n r_2 \quad (8.1)$$

由环向平衡条件可列出

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta dx + \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial z} dz (r_2 d\theta) + q_\theta dx (r_2 d\theta) = 0$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial z} r_2 = -q_{\theta} r_2 \quad (8.2)$$

由  $z$  向平衡条件可列出

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} dz (r_2 d\theta) + \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} d\theta dz + q_z dz (r_2 d\theta) &= 0 \\ \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{r_2} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} &= -q_z \end{aligned} \quad (8.3)$$

综合式(8.1)~(8.3),即为一般柱壳的薄膜理论平衡方程式。利用微分关系可以求出薄膜内力为

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta} &= q_{\theta} r_2 \\ N_{\theta z} &= - \int \left( q_{\theta} + \frac{1}{r_2} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} \right) dz + f_1(\theta) \\ N_z &= - \int \left( q_z + \frac{1}{r_2} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} \right) dz + f_2(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

式中,  $f_1(\theta)$ 、 $f_2(\theta)$  均为  $\theta$  的函数,可由边界条件加以确定。

如果略去  $q_z$  (许多工程问题也作了这一简化),而  $q_{\theta}$  及  $q_z$  仅为  $\theta$  之函数,这样式(8.4)可以进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta z} &= zF(\theta) + f_1(\theta) \\ N_z &= \left( \frac{z^2}{2r_2} \right) \frac{dF}{d\theta} - \left( \frac{z}{r_2} \right) \frac{df_1}{d\theta} + f_2(\theta) \\ F(\theta) &= q_{\theta} + \frac{1}{r_2} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

如图 8.2 所示的抛物面柱壳屋盖结构,其壳面方程为

$$y^2 = 4ax$$

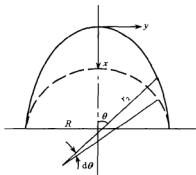


图 8.2 抛物面柱壳屋盖

如柱壳跨度两端为铰支,表面承受的均布竖向荷载为  $p$ ,则其体积力为

$$q_n = -p \cos \theta \quad q_{\theta} = p \sin \theta$$

由壳面方程可以求出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4a^2}{y^3}$$

按曲率表达式有

$$r_2 = -\frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

式中,  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ 。从图 8.2 中可看出  $y'' = -\frac{\text{ctg}^3\theta}{2a}$ , 从而可得  $r_2$  为

$$r_2 = 2a \cos^{-3}\theta$$

求出各内力为

$$N_\theta = -2ap \cos^{-2}\theta \quad F_\theta = -p \sin\theta \quad N_{\theta z} = -\left(\frac{L}{2} - x\right) p \sin\theta$$

$$N_z = \frac{p}{4a} x(L - x) \cos^4\theta$$

式中,  $L$  为  $z$  向屋盖的跨度。

柱壳的有矩分析是按圆柱壳进行的, 这是因为有矩效应仅在边缘附近发生, 弯矩和横向剪力呈急剧衰减变化。因此在柱壳两端处以相同的曲率半径作圆, 形成的圆柱壳所获得的弯矩和横向剪力等可以代表一般柱壳结构在端部的相同内力, 如图 8.2 中虚线所示。

如果柱壳屋盖结构在  $z$  向两端处的环向位移、法向位移等于零, 这样的壳中轴向平面内的弯曲可以略去不计, 即设  $M_z = M_{\theta z} = V_z = 0$ , 由此得出

$$V_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \quad (8.6)$$

式中,  $R$  为圆柱壳半径。

按圆柱壳的半无矩理论, 设  $M_z = M_{\theta z} = V_z = 0$ , 齐次平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} &= 0 \\ -\frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ V_\theta &= \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

由此各量可以统一由  $M_\theta$  表示为

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial z} &= \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 M_\theta}{\partial \theta^3} \right) \\ \frac{\partial^2 N_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{R^3} \left( \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4 M_\theta}{\partial \theta^4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

列出应变和位移的关系为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{Eh} (N_z - \mu N_\theta) \\ \nu_{z\theta} &= \frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{\theta z} \\ \epsilon_\theta &= \frac{\partial v}{R\partial\theta} - \frac{w}{R} = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \mu N_z) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

再由弯矩表达式

$$M_\theta = -\frac{D}{R^2} \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right)$$

可以得到下列决定  $M_\theta$  的八阶微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^8 M_\theta}{\partial\theta^8} + (2+\mu)R^2 \frac{\partial^6 M_\theta}{\partial z^2 \partial\theta^6} + 2 \frac{\partial^6 M_\theta}{\partial\theta^6} + (1+2\mu)R^4 \frac{\partial^6 M_\theta}{\partial z^4 \partial\theta^4} \\ + 2(2+\mu)R^2 \frac{\partial^6 M_\theta}{\partial z^2 \partial\theta^4} + \frac{\partial^4 M_\theta}{\partial\theta^4} + \mu R^6 \frac{\partial^6 M_\theta}{\partial z^6 \partial\theta^2} \\ + (1+\mu)^2 R^2 \frac{\partial^6 M_\theta}{\partial z^4 \partial\theta^2} + (2+\mu)R^2 \frac{\partial^4 M_\theta}{\partial z^2 \partial\theta^2} \\ + 12(1-\mu^2) \frac{R^6}{h^2} \frac{\partial^4 M_\theta}{\partial z^4} = 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

此方程的一般解为

$$M_\theta = Ae^{m\theta} \sin \frac{m\pi z}{l} \quad (8.11)$$

引入符号

$$\frac{m\pi z}{l} = \lambda$$

得出关于  $a$  的代数方程,为

$$\begin{aligned} a^8 + [2 - (2+\mu)\lambda^2]a^6 + [(1+2\mu)\lambda^4 - 2(2+\mu)\lambda^2 + 1]a^4 \\ + [-\mu\lambda^6 + (1+\mu)^2\lambda^4 - (2+\mu)\lambda^2]a^2 \\ + 12(1-\mu^2) \frac{R^2}{h^2} \lambda^4 = 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

上式有复数形式的根,为

$$a_{1,2,3,4} = \pm (\nu_1 \pm i\beta_1)$$

$$a_{5,6,7,8} = \pm (\nu_2 \pm i\beta_2)$$

考虑到  $M_\theta$  的边缘效应,即  $M_\theta$  随  $\theta$  的增大而急剧衰减,我们可以仅用其中四个根,即

$$\begin{aligned} M_\theta &= [e^{-\nu_1\theta}(c_1\cos\beta_1\theta + c_2\sin\beta_1\theta) \\ &+ e^{-\nu_2\theta}(c_3\cos\beta_2\theta + c_4\sin\beta_2\theta)] \sin \frac{m\pi z}{l} \end{aligned} \quad (8.13)$$

如果采用级数解,则有

$$M_{\theta} = \sum A_m \alpha_m^2 \sin \frac{m\pi z}{l}$$

以上式中的系数  $c_1 \sim c_4$  由边界条件加以确定。如混凝土结构取  $\mu=0$ , 则式(8.12)还可简化。

将这一解答与外力荷载下的薄膜理论内力解相加, 即是外荷载作用于柱壳结构的全部内力解。

再考虑结构的对称性, 即按图 8.2 选取  $\theta=0$  的位置,  $c_1 \sim c_4$  简化成两个常数。

## 8.2 网壳结构的比拟方法

网壳结构是将连续形的壳体结构用离散化的杆件作受力单元, 模拟成连续形的壳体。如果模拟成球面壳结构, 称之为球面网壳; 如果模拟成柱面壳结构, 称之为柱面网壳。

网壳结构的单元是由众多杆件组成的。往往可以分成两类: 第一类是由径向杆系、环向杆系及斜向杆系组成, 如图 8.3(a, b)所示仅是其中的两种; 第二类是由三角形网格组成的三向格构体系, 这类网壳不存在明显的横向和竖向杆件, 同时这类网壳的杆件长度种类很多, 杆件的布置也相对复杂。

按图 8.3 的球面网格体系, 可以计算与此网格等效的连续体单元的薄膜刚度及弯曲刚度。

环向和径向薄膜刚度  $T_{\theta\theta}$ 、 $T_{\theta\phi}$  分别为

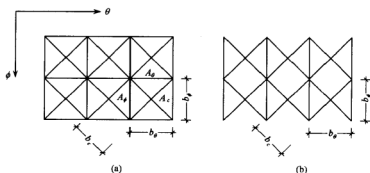


图 8.3 两种典型的网格

$$T_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^n r_i \cos^4 \alpha_i = \frac{EA_{\theta}}{b_s} + 2 \frac{EA_{\theta}}{b_c} \cos^4 \alpha \quad (8.14)$$

$$T_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^n r_i \sin^4 \alpha_i = \frac{EA_t}{b_\theta} + 2 \frac{EA_c}{b_c} \sin^4 \alpha \quad (8.15)$$

混合薄膜刚度  $T_{\theta\theta}$  为

$$T_{\theta\theta} = T_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^n r_i \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i = 2 \frac{EA_c}{b_c} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad (8.16)$$

环向和径向弯曲刚度  $L_{\theta\theta}$ 、 $L_{\theta r}$  分别为

$$\begin{aligned} L_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^n r_m \cos^4 \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^n r_n \sin^2 \alpha_i \cos^4 \alpha_i \\ &= \frac{EI_\theta}{b_\theta} + 2 \frac{EI_c}{b_c} \cos^4 \alpha \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} L_{\theta r} &= \sum_{i=1}^n r_m \sin^4 \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^n r_n \sin^4 \alpha_i \cos^2 \alpha_i \\ &= \frac{EI_t}{b_\theta} + 2 \frac{EI_c}{b_c} \sin^4 \alpha \end{aligned} \quad (8.18)$$

混合弯曲刚度  $L_{\theta r}$  及法向刚度  $L_{rr}$  分别为

$$\begin{aligned} L_{\theta\theta} = L_{\theta r} &= \sum_{i=1}^n r_m \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i - 2 \sum_{i=1}^n r_n \sin^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_i \\ &= 2 \frac{EI_c}{b_c} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} L_{rr} &= \sum_{i=1}^n r_m \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i + \sum_{i=1}^n r_n (\cos^4 \alpha_i - \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i) \\ &= 2 \frac{EI_c}{b_c} \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (8.20)$$

以上各式中均假定各杆件不具有抗扭刚度, 即  $r_n = 0$ 。

图 8.4 为平面为正三角形网格的三向格子型球面网壳, 其等效刚度为

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^n r_i \cos^4 \alpha_i = \frac{2EA}{\sqrt{3}l} + \frac{4EA}{\sqrt{3}l} \cos^4 \frac{\pi}{3} = \frac{9}{8} \frac{EA}{b} \\ T_{\theta r} &= \sum_{i=1}^n r_i \sin^4 \alpha_i = 2 \frac{EA}{b} \sin^4 \frac{\pi}{3} = \frac{9}{8} \frac{EA}{b} \end{aligned}$$

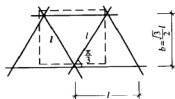


图 8.4 正三角形网格单元

$$T_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^n r_i \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i = 2 \frac{EA}{b} \cos^2 \frac{\pi}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8} \frac{EA}{b}$$

$$L_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^n r_{mi} \cos^4 \alpha_i = \frac{9}{8} \frac{EI}{b}$$

$$L_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^n r_{mi} \sin^4 \alpha_i = \frac{9}{8} \frac{EI}{b}$$

$$L_{rr} = \sum_{i=1}^n r_{mi} \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i = \frac{3}{8} \frac{EI}{b} = L_{\theta\theta}$$

以上各式中,  $b = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ ,  $l$  为杆件长度。

如图 8.5 所示的是两种应用于圆柱面网壳的矩形格构单元, 其中  $A_1 = A_2 = A$ ,  $A_3 = \frac{A}{\sqrt{2}}$ ;  $I_1 = I_2 = I$ ,  $I_3 = \frac{I}{\sqrt{2}}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 。

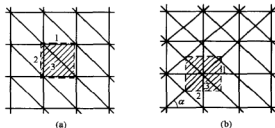


图 8.5 圆柱面网壳的矩形网壳单元

对图 8.5 中(b)所示的矩形四向网格单元, 其对应的等效刚度为

$$T_{\theta\theta} = \frac{EA_1}{b_\theta} + 2 \frac{EA_3}{b_c} \cos^4 \alpha = \frac{3}{2b} EA$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{EA_2}{b_\theta} + 2 \frac{EA_3}{b_c} \sin^4 \alpha = \frac{3}{2b} EA$$

$$T_{\theta\theta} = 2 \frac{EA_3}{b_c} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{EA}{2b}$$

$$L_{\theta\theta} = \frac{EI_1}{b_\theta} + 2 \frac{EI_3}{b_c} \cos^4 \alpha = \frac{3}{2b} EI$$

$$L_{\theta\theta} = \frac{EI_2}{b_\theta} + 2 \frac{EI_3}{b_c} \sin^4 \alpha = \frac{3}{2b} EI$$

$$L_{\theta\theta} = 2 \frac{EI_3}{b_c} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{EI}{2b} = L_{rr}$$

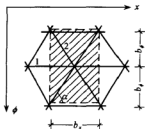


图 8.6 圆柱壳网格三角形单元

式中,  $b$  为矩形单元的边长。

如图 8.6 所示的是应用于圆柱壳面网格的三角形格构单元, 其对应的等效刚度为



$$T_{xx} = \frac{EA_1}{b_\theta} + 2 \frac{EA_2}{b_c} \cos^4 \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4b_x} EA$$

$$T_{\theta\theta} = 2 \frac{EA_2}{b_c} \sin^4 \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4b_x} EA$$

$$T_{x\theta} = 2 \frac{EA_2}{b_c} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4b_x} EA$$

$$L_{xx} = \frac{EI_1}{b_\theta} + 2 \frac{EI_2}{b_c} \cos^4 \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4b_x} EI$$

$$L_{\theta\theta} = 2 \frac{EI_2}{b_c} \sin^4 \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4b_x} EI$$

$$L_{x\theta} = L_{\theta x} = 2 \frac{EI_2}{b_c} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4b_x} EI$$

在分析和求解网壳结构中各杆件的内力时,通常进行薄壳比拟,即认为是连续化的壳体受力,根据静力和变形等效的原则,再求出模拟壳体的网壳中杆的内力。这种薄壳比拟法分析网壳结构,一般分为薄膜理论和有矩理论,也即壳体结构的内力计算的两种理论分析,再进行网壳分析。

以下主要利用薄膜理论拟壳法来分析网壳结构中杆的内力,以球面网壳为例。

如图 8.7 所示为球壳网壳等效薄膜内力及网壳内力图。图(8.7a)为从球壳中截取的任意微元体,作用于该微元截面中一个单位长度的薄膜力为  $N_\theta$ 、 $N_\phi$ ;图(8.7b)为对应的网壳杆件内力。从图中可以看出所谓静力等效的意义,即网壳中所截取的网壳单元体中各杆件内力在环向和径向的总量与连续球壳对应微元体的环向和径向内力的总量等效。

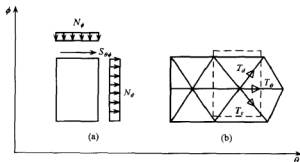


图 8.7 网壳等效内力图

按网壳结构的分类,即三角形网格与矩形网格的不同,这里分别求出两种网格下的内力等效关系。

如图 8.8(a,b)所示为正三角形网格单元内力等效关系。由图中可知内力在  $\theta$

方向等效,即

$$\frac{1}{2}T_{\theta} + T_{\theta} + \frac{1}{2}T_{\theta} + \frac{1}{2}T_c + \frac{1}{2}T_d = N_{\theta}\sqrt{3}l$$

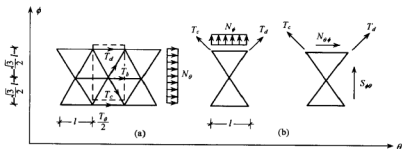


图 8.8 正三角形网格单元内力等效图

即

$$4T_{\theta} + T_c + T_d = \sqrt{3}lN_{\theta}$$

由内力在  $\phi$  方向等效有

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_d + \frac{\sqrt{3}}{2}T_c = lN_{\theta}$$

再由剪力等效有

$$\frac{1}{2}T_c - \frac{1}{2}T_d = lN_{\theta\theta}$$

将以上三式写成

$$T_{\theta} = \frac{l}{2\sqrt{3}}(3N_{\theta} - N_{\theta\theta})$$

$$T_c = \frac{l}{\sqrt{3}}(N_{\theta} + \sqrt{3}N_{\theta\theta})$$

$$T_d = \frac{l}{\sqrt{3}}(N_{\theta} - \sqrt{3}N_{\theta\theta})$$

即可由薄膜内力  $N_{\theta}$ 、 $N_{\theta}$  及  $N_{\theta\theta}$  求出网壳中各杆内力。

如图 8.9 所示为矩形三向网格单元内力等效关系。由图中可知有以下平衡关系:

$$T_{\theta} + T_c \cos \alpha = l_2 N_{\theta}$$

$$T_{\theta} + T_c \sin \alpha = l_1 N_{\theta}$$

$$T_c \sin \alpha = l_2 N_{\theta\theta}$$

$$T_c \cos \alpha = l_1 N_{\theta\theta}$$

由薄膜内力  $N_{\theta}$ 、 $N_{\theta}$  及  $N_{\theta\theta}$  可以求出杆件内力,得

$$T_{\theta} = l_2 N_{\theta} - l_1 N_{\theta\theta}$$

$$T_{\theta} = l_1 N_{\theta} - l_2 N_{\theta\theta}$$

$$T_c = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} N_{\theta\theta}$$

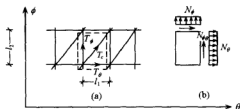


图 8.9 矩形网格单元内力等效图

按壳体结构的有矩理论来分析和计算模拟网壳的杆件内力要复杂得多,这是因为除了要考虑静力平衡关系之外,尚要考虑变形关系。但大多数的壳体结构除边缘附近之外,主要壳体在外力作用下均可用薄膜内力计算,网壳结构是模拟壳体的结构,故用薄膜理论的静力等效来计算网壳杆件内力是可行的;仅在边界附近的杆件要用壳体有矩理论分析,但这一区段是极小的。

## 附录 非线性空间结构分析的数学方法

### 一、偏微分方程的差分法

引入符号

$$\begin{aligned}\Delta f(x_i) &= f(x_i + h) - f(x_i) \\ \nabla f(x_i) &= f(x_i) - f(x_i - h) \\ \delta f(x_i) &= f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2}) \\ f(x_i, x_j) &= \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}\end{aligned}\quad (\text{附 } 1)$$

式中,  $\Delta f(x_i)$ 、 $\nabla f(x_i)$ 、 $\delta f(x_i)$ 以及  $f(x_i, x_j)$  分别为  $f(x)$  在点  $x = x_i$  处以  $h$  为步长的向前差分、向后差分、中心差分和在  $x_i, x_j$  处的一阶差商。

当  $h$  充分小或当  $x_j$  充分靠近  $x_i$  时, 有

$$\left. \begin{aligned}f'(x_i) &\approx \frac{\Delta f(x_i)}{h} & f'(x_i) &\approx \frac{\nabla f(x_i)}{h} \\ f'(x_i) &\approx \frac{\delta f(x_i)}{h} & f'(x_i) &\approx f(x_i, x_j)\end{aligned}\right\} \quad (\text{附 } 2)$$

这样就把连续形式的  $f'(x)$  转化为有规则的离散的差分、差商形式。

差分 and 微分的性质有很多相似之处, 主要性质为

1) 常数的差分为零。

2) 差分算子为线性算子。

3) 如果  $f(x)$  是  $m$  次多项式, 以向前差分为例, 记为  $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ , 那么  $k$  阶差分  $\Delta^k f(x)$  ( $0 \leq k \leq m$ ) 是  $m-k$  次多项式, 并有  $\Delta^{m+l} f(x) = 0$  ( $l$  是正整数)。

4)  $\Delta(f_k, g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$ 。

5)  $\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k$ 。

给出函数  $f$  在  $n+1$  个互异点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  的值  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ , 称

$$\frac{f(x_0, x_1, \dots, x_k) - f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})}{x_0 - x_{k+1}}$$

为函数  $f(x)$  在  $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$  点的  $k+1$  阶差商, 这是对式(附 1)的推广。

显然,  $k$  阶差商  $f(x_0, x_1, \dots, x_k)$  是由函数值  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$  线性组合

而成,即

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{w'_k(x_j)} \quad (\text{附 } 3)$$

式中

$$w_k(x) = \prod_{j=0}^k (x - x_j) \quad w'_k(x_j) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i) \quad (\text{附 } 4)$$

当节点  $x_k$  为等距离[即  $x_k = x_0 + kh, y_k = f(x_k)$ ]时,差分与差商间有

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \quad (\text{附 } 5)$$

现在讨论差分方程的解。如果  $\{F_n(x_0, x_1)\}$  是确定在  $n \in N$  的一函数序列,其中  $N$  是某一相邻整数的集合,而  $x_0$  和  $x_1$  是某实数区间上的任意实数,那么对于所有  $n \in N$ ,方程组

$$F_n(y_n, y_{n+1}) = 0 \quad (\text{附 } 6)$$

叫做一阶差分方程。对于所有  $y_n$  (该实数区间) 及  $n \in N$  满足序列  $\{y_n\}$  叫做差分方程的解。

例如,求  $F_n(x_0, x_1) = x_0 - x_1 + 2n$  的通解,则对于所有整数  $n$ ,可得差分方程

$$y_n - y_{n+1} + 2n = 0$$

这个方程的通解为

$$y_n = n(n-1) + c$$

式中,  $c$  为任意常数,类似于一阶微分方程中的任意常数。

对  $m+1$  个变量的函数序列  $\{F_n(x_0, x_1, \dots, x_m)\}$  的  $m$  阶差分方程

$$F_n(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) = 0 \quad (\text{附 } 7)$$

对应为

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + \dots + a_m y_{n+m} = 0 \quad (\text{附 } 8)$$

式中,  $a_0, a_1, \dots, a_m$  独立于  $n$ , 称(附 8)为  $m$  阶常系数齐次线性差分方程。

对于二阶差分方程

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2} = 0 \quad (\text{附 } 9)$$

要寻求  $y_n = z^n$  形式的解,其中  $z$  与  $n$  无关,代  $z^n$  于式(附 9)中,有

$$a_0 z^n + a_1 z^{n+1} + a_2 z^{n+2} = 0$$

因此推出

$$z^n = 0$$

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = 0$$

由前一方程得  $z=0$ , 即  $y_n=0$ 。后一方程为式(附 9)的特征方程。一般情况下,  $z$  有两个可能值,如设其两个不同根为  $z_1$  和  $z_2$ , 则有两个独立解

$$y_n = z_1^n \quad y_n = z_2^n$$

很容易证明

$$y_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n$$

上式也是差分方程(附 9)的解,其中  $c_1$  与  $c_2$  是任意常数。

如果  $a_1^2 = 4a_0a_2$ , 这时对差分方程(附 9), 仅有一个解  $y_n = z_1^n$ , 方程(附 9)的通解为

$$y_n = c_1 z_1^n + c_2 n z_1^n$$

为了确定  $m$  阶方程

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + \cdots + a_m y_{n+m} = 0 \quad (\text{附 } 10)$$

的通解, 仍可用  $y_n = z^n$  去试, 这就要求

$$a_0 z^n + a_1 z^{n+1} + \cdots + a_m z^{n+m} = 0$$

因此, 或者  $z=0$ , 或者

$$P_m(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m = 0 \quad (\text{附 } 11)$$

式中, (附 11) 和  $P_m$  分别为式(附 10)的特征方程和特征多项式。一般地, 式(附 11)有  $m$  个根, 分别为  $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 。如果这些根是不相同的, 那么式(附 10)的通解为

$$y_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_m z_m^n \quad (\text{附 } 12)$$

如果  $P_m$  有  $r$  重根, 即  $z_1 = z_2 = \cdots = z_r$ , 则式(附 10)的通解为

$$y_n = c_1 z_1^n + c_2 n z_1^n + c_3 n^2 z_1^n + \cdots + c_r n^{r-1} z_1^n + c_{r+1} z_{r+1}^n + \cdots + c_m z_m^n \quad (\text{附 } 13)$$

**算例 1** 求三阶差分方程  $y_n - y_{n+1} - y_{n+2} + y_{n+3} = 0$  具有  $y_{-1}=0, y_0=1$  和  $y_1=2$  的解。

**解** 特征方程

$$1 - z - z^2 + z^3 = 0$$

具有  $z=-1, 1, 1$  的通解是

$$y_n = c_1 (-1)^n + c_2 + n c_3$$

此外还要求

$$y_{-1} = -c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

$$y_0 = c_1 + c_3 = 1$$

$$y_1 = -c_1 + c_2 + c_3 = 2$$

由此解得

$$c_1 = 0 \quad c_2 = c_3 = 1$$

故所求解为

$$y_n = 1 + n$$

求解非齐次差分方程

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + \cdots + a_m y_{n+m} = b_n \quad (\text{附 } 14)$$

时, 首先求齐次方程

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + \cdots + a_m y_{n+m} = 0 \quad (\text{附 } 15)$$

的通解,再求式(附 14)的一个特解,两者之和即为差分方程(附 14)的全解。

用差分方法处理微分方程的边值问题,在于构造一个含有若干个未知数的方程组,使得函数解  $y(x)$  在某些点上  $x_i$  处满足  $y(x_i)$ 。用差商代替导数,将连续的边值问题离散为代数方程问题。

**算例 2** 求函数  $y(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续,在  $(a, b)$  内满足方程

$$y'' - q(x)y = f(x) \quad (\text{附 } 16)$$

并满足  $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$  的解。

**解** 将区间  $[a, b]$  分成  $N$  等份,分点为

$$x_j = a + jh \quad (j = 1, 2, \dots, N-1)$$

其中,  $h = \frac{1}{N}(b-a)$  为步长。按差分公式

$$f''(x_j) = \frac{1}{h^2}[y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))] - \frac{1}{12}h^2 y''(\xi_j)$$

微分方程可表示为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2}[y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))] - q(x_j)y(x_j) \\ & = f(x_j) + \frac{h^2}{12}y''(\xi_j) \end{aligned} \quad (\text{附 } 17)$$

上式即是所求函数  $y(x)$  在分点  $x_j$  处的值  $y(x_j)$  应满足的关系式。当  $h$  充分小时,最后一项  $\frac{h^2}{12}y''(\xi_j)$  与其他各项相比很小,可以略去。

再利用边值条件  $y_0 = y(x_0) = \alpha, y_N = y(x_N) = \beta$ , 便得到  $N-1$  个未知数  $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$  的  $N-1$  个方程的方程组,方程(附 17)是去掉等号右边最后一项即截断误差项的方程,可以称为方程(附 16)的近似方程或差分方程,进而可表示为

$$y_{j+1} - (2 + q_j h^2)y_j + y_{j-1} = f_j h^2 \quad (\text{附 } 18)$$

式中

$$q_j = q(x_j) \quad f_j = f(x_j)$$

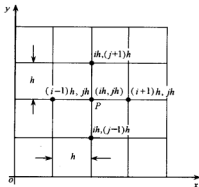
求解差分方程的结果,可以近似地得出微分方程的解。自然,对结构工程中求解式(附 18)型的差分方程时,由于节点划分得多,差分方程也对应得多,往往形成大型的多变量的线性方程组,要借助于线代数方程组及计算机才能完成。

结构工程中常遇到的二阶偏微分方程的边值问题也可用差分法将它离散化。例如对椭圆型偏微分方程,设函数  $u(x, y)$  在闭区间  $(0 \leq x \leq 1), (0 \leq y \leq 1)$  上连续,并在该区间内满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{附 } 19)$$

且满足边值条件

$$u|_r = \phi$$



附图 1 差分平面网格

在边界  $T$  上。

对于域内格点  $P(ih, jh)$ , 根据数值微分公式有

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_P = \frac{1}{h^2} [u((i+1)h, jh) - 2u(ih, jh) + u((i-1)h, jh)] - \frac{h^2}{12} \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_{P_1}$$

式中,  $P_1$  为点  $(\zeta_1 h, jh)$ , 其中  $i-1 < \zeta_1 < i+1$ 。

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_P = \frac{1}{h^2} [u(ih, (j+1)h) - 2u(ih, jh) + u(ih, (j-1)h)] - \frac{h^2}{12} \left. \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right|_{P_2}$$

式中,  $P_2$  为点  $(ih, \zeta_2 h)$ , 其中  $j-1 < \zeta_2 < j+1$ 。

在  $P(ih, jh)$  域内的格点, 其拉普拉斯方程为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} [u((i+1)h, jh) + u((i-1)h, jh) + u(ih, (j+1)h) \\ & + u(ih, (j-1)h) - 4u(ih, jh)] \\ & = \frac{h^2}{12} \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_{P_1} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \bigg|_{P_2} \end{aligned}$$

当  $h$  充分小时, 等号右端项可略去不计, 则新的方程为

$$\frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) = 0 \quad (\text{附 } 20)$$

由上式便得到有  $(N-1)^2$  个未知数的  $(N-1)^2$  个方程的方程组, 从而可求得作为  $u(ih, jh)$  的近似值  $u_{i,j}$ 。式(附 20)即为拉普拉斯方程(附 19)的差分方程。

上面的网格可取成正方形网格, 也可取成矩形网格。这时只要将直线  $y = jh$  改为  $y = jk$ , 其中  $k = \frac{1}{M}$  ( $M$  为自然数,  $M \neq N$ ) 即可。

当边界上的格点不在  $T$  上时, 可以用直线转移的办法处理。例如设  $T$  上与网格边界点  $Q$  最近的点, 可令  $u(Q) = u(R) = \phi(R)$ , 或者用线性插值方法, 例如设  $P$ 、

其中,  $T$  为边界;  $\phi$  为  $T$  上的已知函数。

用差分法解偏微分方程边值问题, 即是构造一个含有若干个未知数的方程组, 使函数  $u(x, y)$  在这些点  $(x_i, y_j)$  上满足方程, 用  $u(x_i, y_j)$  的近似值代替函数值, 差商代替导数, 将连续的边值问题化为离散的差分边值问题。

设  $N$  为自然数,  $h = \frac{1}{N}$ , 在  $xy$  平面上画直线  $x = ih, y = jh, i, j = 0, 1, \dots, N$ 。如附图 1 所示的  $N=4$  的网格。直线的交点叫格点, 共有  $(N+1)^2$  个。其中  $(N-1)^2$  在区域内, 其余



$Q$  和  $R$  三点在一直线上,其中  $Q$  为边界格点, $P$  为域内格点, $R$  为这条直线与  $T$  的交点, $P$  和  $Q$  的距离为  $h$ , $R$  和  $Q$  的距离为  $d$ ,可以表示为

$$u(Q) = \frac{h\phi(R) + du(P)}{h + d} \quad (\text{附 } 21)$$

式中, $\phi$  为边界  $T$  上的已知函数。

至于二阶偏微分方程的其他类型,如抛物线型、双曲线型等,都可参照椭圆型方程化为差分方程的办法加以求解。

## 二、傅里叶级数及展开式

如取基本函数族

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots \quad (\text{附 } 22)$$

并且函数  $f(x)$  能展开为

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{附 } 23)$$

这种级数称为傅里叶级数,系数  $a_0, a_k, b_k$  为傅里叶级数系数。限于傅里叶级数在非线形结构中的应用,这里仅讨论其展开问题,不去涉及它的收敛性等概念。

首先应指出傅里叶级数的“正交性”:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx dx &= 0 & (k \neq 0) \\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx dx &= 0 & (k \neq 0) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx &= 0 & (k \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx &= 0 & (k \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin nx dx &= 0 & (\text{不论 } k, n \text{ 是否相等}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 24)$$

也即函数族式(附 22)中的函数两两正交。

还应指出,三角函数是周期函数,所以式(附 22)中除 1 之外的各函数都是以  $2\pi$  为周期的函数,即

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

傅里叶级数的展开式中的系数,即式(附 23)中的  $a_k, b_k$  是按以下方式确定的:先从式(附 23)中取出前面有限个函数,各附以某个系数,再叠加起来成为

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_l \cos lx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_l \sin lx \quad (\text{附 } 25)$$

如以它作为所给函数  $f(x)$  的近似表达式,会有误差  $S(x)$ ,即有

$$S(x) = f(x) - \sum_{k=0}^l a_k \cos kx - \sum_{k=1}^l b_k \sin kx \quad (\text{附 } 26)$$

在一个周期中计算  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(x)|^2 dx$  是很有必要的,如利用级数的正交性,则有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |S(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &+ \sum_{k=0}^l a_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\cos kx|^2 dx - \sum_{k=0}^l 2a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &+ \sum_{k=1}^l b_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\sin kx|^2 dx - \sum_{k=1}^l 2b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned} \quad (\text{附 } 27)$$

显然误差越小,即  $\int_{-\pi}^{\pi} |S(x)|^2 dx$  越小,式(附 25)展开得越精确,这就要求

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_k} \int_{-\pi}^{\pi} |S(x)|^2 dx &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, l) \\ \frac{\partial}{\partial b_k} \int_{-\pi}^{\pi} |S(x)|^2 dx &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, l) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 28)$$

由此可以得出系数

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, l) \\ b_k &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2 dx} \quad (k = 1, 2, \dots, l) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 29)$$

如果式(附 25)中的级数取无限性,平均平方误差  $\int_{-\pi}^{\pi} |S(x)|^2 dx$  趋于零,则得出

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (\text{附 } 30)$$

就是函数  $f(x)$  的傅里叶展开,式(附 29)即是傅里叶系数。由于

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^2 dx &= 2\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx &= \pi \quad (k \neq 0) \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2 dx &= \pi \quad (k \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 31)$$

所以傅里叶系数计算式的一般式为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) d\zeta \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) \cos k\zeta d\zeta \quad (k \neq 0) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) \sin k\zeta d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 32)$$

如果函数  $f(x)$  不是以  $2\pi$  为周期的函数,而是以  $2l$  为任意周期的函数,即

$$f(x+2l) = f(x) \quad (\text{附 33})$$

那么以上各系数中的积分则不能用  $\pi$  表示,可以改取

$$y = \frac{\pi}{l}x$$

为自变量,对变量  $y$  来说,函数的周期仍然是  $2\pi$ 。

现取

$$1, \cos y, \sin y, \cos 2y, \sin 2y, \dots, \cos ky, \sin ky \dots$$

为基本函数族,也就是

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l} \dots \text{为基本函数族,作如下}$$

傅里叶展开:

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ky + b_k \sin ky)$$

即

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (\text{附 34})$$

基本函数族具有“正交性”,即

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^l 1 \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} dx &= 0 & (k \neq 0) \\ \int_{-l}^l 1 \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx &= 0 & (k \neq 0) \\ \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx &= 0 & (k \neq n) \\ \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= 0 & (k \neq n) \\ \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= 0 & (\text{不论 } k, n \text{ 是否相等}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 35})$$

计算傅里叶系数的公式为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l\eta}{\pi}\right) d\eta = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{l} d\xi \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 36})$$

从傅里叶系数公式中可看出,偶函数的傅里叶展开是余弦级数,即在  $f(-x) = f(x)$  时,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(\zeta) \sin n \zeta d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\zeta) \sin n \zeta d\zeta \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\zeta) \sin n \zeta d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\zeta) \sin n \zeta d\zeta = 0
\end{aligned}$$

此时仅有余弦级数。对  $2\pi$  周期函数, 仅有  $a_n$  为

$$a_n = \frac{2}{\pi \delta_n} \int_0^{\pi} f(\zeta) \cos n \zeta d\zeta \quad (\text{附 } 37)$$

对  $2l$  周期函数,  $a_n$  可表示为

$$a_n = \frac{2}{l \delta_n} \int_0^l f(\zeta) \cos \frac{n\pi \zeta}{l} d\zeta \quad (\text{附 } 38)$$

同样道理, 对于奇函数  $f(x) = -f(x)$ , 傅里叶系数  $a_n = 0$ , 此时仅有正弦级数; 对  $2\pi$  周期函数, 仅有  $b_n$  为

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\zeta) \sin n \zeta d\zeta \quad (\text{附 } 39)$$

对  $2l$  为周期的函数,  $b_n$  的表达式为

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\zeta) \sin \frac{n\pi \zeta}{l} d\zeta \quad (\text{附 } 40)$$

系数  $a_n$  中的  $\delta_n$  表示  $n=0$  时  $\delta_n=2$ , 在  $n \neq 0$  时取  $\delta_n=1$ 。如果  $f(x)$  既非偶函数, 又非奇函数, 傅里叶展开式中正弦级数、余弦级数都存在。

对于非周期函数  $f(x)$ , 可以引入傅里叶变换, 并按  $2l$  为周期和  $l \rightarrow \infty$  的极限情况展开。以  $2l$  为周期的函数  $f(x)$  的傅里叶级数是

$$\begin{aligned}
f(x) = & \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\zeta) \cos \frac{k\pi \zeta}{l} d\zeta \right. \\
& \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} + \left. \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\zeta) \sin \frac{k\pi \zeta}{l} d\zeta \sin \frac{k\pi x}{l} \right\} \quad (\text{附 } 41)
\end{aligned}$$

设  $f(x)$  在区间  $-\infty < x < \infty$  绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \text{有限值}$$

令  $l \rightarrow \infty$ , 则上面  $f(x)$  展式右端第一项

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\zeta) d\zeta \rightarrow 0$$

引入不连续变量  $a = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \dots, \frac{k\pi}{l} \dots$ , 于是展开式右端第二项为

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\zeta) \cos \frac{k\pi \zeta}{l} d\zeta \cos \frac{k\pi x}{l} = \sum_a \frac{1}{l} \cos a \\
& \cdot \int_{-l}^l f(\zeta) \cos a \zeta d\zeta = \sum_a \frac{1}{\pi} \Delta a \cos a x \int_{-l}^l f(\zeta) \cos a \zeta d\zeta \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} da \cos a x \int_{-l}^l f(\zeta) \cos a \zeta d\zeta
\end{aligned}$$

同理, 展开式右端第三项为

$$\rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} da \sin a x \int_{-l}^l f(\zeta) \sin a \zeta d\zeta$$

因此,非周期函数  $f(x)$  的傅里叶积分为

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(a)\cos ax + B(a)\sin ax]da \quad (\text{附 } 42)$$

其中

$$A(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \cos a\zeta d\zeta \quad (\text{附 } 43)$$

$$B(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \sin a\zeta d\zeta$$

称为  $f(x)$  的傅里叶变换。

同样道理,对偶函数  $f(x)$ ,傅里叶展开式仅有系数  $A(a)$  级数项;对奇函数  $f(x)$ ,傅里叶展开式仅有系数  $B(a)$  级数项。

设  $f(x, y)$  对  $x$  而言以  $2l$  为周期,对  $y$  而言以  $2m$  为周期,现将进行  $f(x, y)$  的多重傅里叶展开,可以先对  $x$  展开傅里叶级数,即

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(y) \cos \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(y) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (\text{附 } 44)$$

其中系数

$$\left. \begin{aligned} a_k(y) &= \frac{1}{l\delta_k} \int_{-l}^l f(\zeta, y) \cos \frac{k\pi\zeta}{l} d\zeta \\ b_k(y) &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\zeta, y) \sin \frac{k\pi\zeta}{l} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 45)$$

显然仍是  $y$  的周期函数,其周期为  $2m$ 。再将  $a_k(y)$ 、 $b_k(y)$  展为傅里叶级数,就可得到二重傅里叶级数,即

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn} \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{m} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{kn} \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{kn} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{m} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{kn} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} \quad (\text{附 } 46) \end{aligned}$$

其系数

$$\left. \begin{aligned} A_{kn} &= \frac{1}{lm\delta_k\delta_n} \int_{-l}^l \int_{-m}^m f(\zeta, \eta) \cos \frac{k\pi\zeta}{l} \cos \frac{n\pi\eta}{m} d\zeta d\eta \\ B_{kn} &= \frac{1}{lm\delta_k} \int_{-l}^l \int_{-m}^m f(\zeta, \eta) \cos \frac{k\pi\zeta}{l} \sin \frac{n\pi\eta}{m} d\zeta d\eta \\ C_{kn} &= \frac{1}{lm\delta_n} \int_{-l}^l \int_{-m}^m f(\zeta, \eta) \sin \frac{k\pi\zeta}{l} \cos \frac{n\pi\eta}{m} d\zeta d\eta \\ D_{kn} &= \frac{1}{lm} \int_{-l}^l \int_{-m}^m f(\zeta, \eta) \sin \frac{k\pi\zeta}{l} \sin \frac{n\pi\eta}{m} d\zeta d\eta \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 47)$$

$f(x, y)$  也可分别区分对  $x$  或  $y$  的偶函数、奇函数,而有选择地进行傅里叶展开,即  $A_{kn}$ 、 $B_{kn}$ 、 $C_{kn}$ 、 $D_{kn}$  分别参见  $f(x)$  关于  $x$  的奇、偶函数的特点,会出现部分为零的简化二重傅里叶展开。

傅里叶变换式(附 42)除了在求傅里叶系数中应用外,它也是一种微分方程的

工具。在应用傅里叶变换时,也引入了一个原函数与一个象函数对应,然后在解微分方程时用对象函数较简单的运算代替原函数的复杂运算。

由下式表达的函数  $F(n)$  称为  $f(x)$  的有限傅里叶正弦变换

$$F(n) = \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (\text{附 48})$$

式中,  $n$  为正整数。相应的逆变换为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \sin nx \quad (0 < x < \pi) \quad (\text{附 49})$$

$f(x)$  在正半轴上的傅里叶正弦变换为

$$F(r) = \int_0^{\infty} f(x) \sin rx dx \quad (r \geq 0) \quad (\text{附 50})$$

其逆变换为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(r) \sin rx dx \quad (r \geq 0) \quad (\text{附 51})$$

类似地,有限傅里叶变换为

$$F(c) = \int_0^{\pi} f(x) \cos cx dx \quad (\text{附 52})$$

式中,  $c$  为正整数。逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} F(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{c=1}^{\infty} F(c) \cos cx \quad (0 < x < \pi) \quad (\text{附 53})$$

$f(x)$  在正半轴上的傅里叶余弦变换为

$$F(c) = \int_0^{\infty} f(x) \cos cx dx \quad (c \geq 0) \quad (\text{附 54})$$

其逆变换为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(r) \cos rx dx \quad (r \geq 0) \quad (\text{附 55})$$

### 三、Euler 方程的特征值解

形如

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (\text{附 56})$$

的方程,并且未知函数  $y$  及其各阶导数均为一次的微分方程称为  $n$  阶线性微分方程。式(附 56)中当  $f(x)=0$  时,该方程称为齐次方程,否则该方程为非齐次方程。

按微分方程的理论,线性方程(附 56)的解应分为两部分,即齐次方程的通解  $y_0$  和一个该方程的特解  $y_p$ ,方程的通解为  $y=y_0+y_p$ 。

这里引入算符  $L$ ,并有

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y \quad (\text{附 57})$$

显然,这是与式(附 56)等同的线性方程表达式的等式左边部分。运算符号  $L$  具有如下性质:

$$1) L(cy) = cL(y)。$$

$$2) L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)。$$

3) 若  $y = y_1(x)$  是  $L[y] = 0$  的一个特解,  $c$  为任意常数, 则  $y = cy_1(x)$  也是一个解。

4) 若  $y_1(x), y_2(x)$  都满足  $L(y) = 0$ , 则  $y_1(x) + y_2(x)$  也满足上述方程。

5) 若  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  是方程  $L(y) = 0$  的  $n$  个解, 则带有任意常数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  的值  $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$  也是  $L(y) = 0$  的一个解。

以上各性质可用算符的简单运算得到。

如果  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是  $L(y) = 0$  的解, 并且当且仅当  $c_1, c_2, \dots, c_n$  为零时, 才有

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0$$

则说  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是线性无关的, 并且

$$y_0 = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n \quad (\text{附 } 58)$$

是方程(附 56)的通解。

如果方程(附 56)中的系数是常数, 即

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \quad (\text{附 } 59)$$

则称为常系数线性微分方程。

求解式(附 59)的常系数微分方程可用特征值的办法。如果令  $D = \frac{d}{dx}$ ,  $L$  为前面所述的算符, 方程(附 59)的求解是先求  $L(y) = 0$  的通解, 然后再求  $L(y) = f(x)$  的一个特解, 两个解的叠加即为式(附 59)的全解。

所谓特征值办法求解方程(附 59), 主要指  $L(y) = 0$  的通解, 因为如果有形如  $y = e^{mx}$  型的解, 即  $L(e^{mx}) = 0$ , 则必有  $L(m) = 0$ 。由此可见, 若  $m$  是  $L(m) = 0$  的一个根, 则  $e^{mx}$  就是  $L(y) = 0$  的解,  $L(m) = 0$  就是方程(附 59)的特征方程。若  $L(m) = 0$  是一个代数方程, 就将常系数线性微分方程简化为了代数方程问题。如果特征方程的根  $m_1, m_2, \dots, m_n$  都不是重根, 那么方程的齐次解为

$$y_1 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x} \quad (\text{附 } 60)$$

如果特征方程的某个根  $m_r$  是  $r$  重根, 则齐次解中相应的项不单是  $ce^{m_r x}$ , 而应是

$$(c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) e^{m_r x}$$

如果  $L(m) = 0$  有复根  $\alpha + i\beta$ , 则必有共轭复根  $\alpha - i\beta$ , 这里  $\alpha, \beta$  为常数,  $i = \sqrt{-1}$ 。如此齐次解中会出现  $c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ , 用  $e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$  代替。

如果复根有重根, 例如  $(\alpha + i\beta)$  是  $L(m) = 0$  的  $r$  重根, 则齐次解相应的项为

$$e^{\alpha x} [(A_1 + A_2 x + \dots + A_r x^{r-1}) \cos \beta x + (\beta_1 + \beta_2 x + \dots + \beta_r x^{r-1}) \sin \beta x]$$

对于  $L(y)=f(x)$  的特解  $y_p$ , 如果  $f(x)$  是两项或更多项的和, 则可先分别选用适当的方法求出对应于每一项的特解, 这些特解的和就是  $L(y)=f(x)$  的特解。

当函数  $f(x)$  有某些特殊形式时, 可用待定系数法求特解。例如

1) 如果  $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$  ( $P$  为多项式,  $\alpha$  为常数), 则方程  $L(y)=f(x)$  具有形如

$$y_p = x^k Q(x) e^{\alpha x} \quad (\text{附 61})$$

的特解, 式中,  $Q$  是系数待定的多项式, 次数与  $P$  相同;  $k$  是特征方程含根  $\alpha$  的重数, 若  $\alpha$  不是特征方程的根, 则取  $k=0$ 。

2) 如果  $f(x)=e^{-\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x)$  ( $P_1, P_2$  为多项式, 有一个可为零,  $\alpha, \beta$  为常数), 则方程  $L(y)=f(x)$  具有形如

$$y_p = x^k e^{-\alpha x} (Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x) \quad (\text{附 62})$$

的特解。式中,  $Q_1, Q_2$  是系数待定的多项式, 其次数等于  $P_1, P_2$  中较高次;  $k$  是特征方程含根  $\alpha+i\beta$  的重数, 若  $\alpha+i\beta$  不是特征方程的根, 则取  $k=0$ 。

将上述式(附 61)或式(附 62)的特解代入方程  $L(y)=f(x)$ , 令等号两边对应项的系数相等, 可以确定各待定系数。

如果  $f(x)$  包含一些不能利用待定系数法的项  $x$  时, 可以采用参数变易法求特解。这时设  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是略去任意常数的齐次方程的解, 即可寻求形如

$$y_p = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \dots + \gamma_n y_n \quad (\text{附 63})$$

的特解,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  是待定函数。因为给出的方程是  $n$  阶的, 应对  $y_p$  连续求导  $n-1$  次, 令各次求导结果中包含  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  的导数所有项之和等于零, 如此得到  $n-1$  个方程。再将  $y_p$  的各阶导数中除去为零的项后余下的项代入原方程, 这样得到第  $n$  个方程, 即可解出  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 。

形如

$$b_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + b_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1} x \frac{dy}{dx} + b_n y = f(x) \quad (\text{附 64})$$

的方程称为 Euler 型方程, 这种方程在非线形结构力学中会大量遇到。这样的方程利用代换  $x=e^t$  可以化成常系数线性方程, 可利用前述有关常系数线性方程的方法求解。需要注意的是这时方程以  $t$  为变量, 求解之后应以  $\ln x=t$  再回代成为关于  $x$  的解。式(附 64)中的  $b_i$  均为常数。

在非线形结构力学中, 常遇到的另一种与线性微分方程有关, 有明显物理意义的方程为

$$\left[ \left( \frac{d^2}{da^2} + \frac{1}{a} \frac{d}{da} - \frac{n^2}{a^2} \right)^2 + 1 \right] w_n = 0 \quad (\text{附 65})$$

这个方程可以分解成两个二阶的方程, 即

$$\left( \frac{d^2}{da^2} + \frac{1}{a} \frac{d}{da} - \frac{n^2}{a^2} \pm i \right) w_n = 0 \quad (\text{附 66})$$



方程组(附 66)是两个共轭的方程。就是说,如果复变函数  $w_n$  是一个方程的解,则其共轭复数  $\bar{w}_n$  将是另一个方程的解。因此我们只需解其中的一个方程就可以了。令

$$\eta = \alpha \sqrt{i}$$

则方程组(附 66)的第一式可改为

$$\frac{d^2 w_n}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dw_n}{d\eta} + \left(1 - \frac{n^2}{\eta^2}\right) w_n = 0 \quad (\text{附 67})$$

这是一个  $n$  阶 Bessel 方程,它的解是

$$w_n(\eta) = c'_1 J_n(\eta) + c'_2 H_n^{(1)}(\eta) \quad (\text{附 68})$$

式中,第一类  $n$  阶 Bessel 函数  $J_n(\eta)$  与第一类  $n$  阶 Hankel 函数都可用 Tomson 函数将其实部与虚部分开,形如

$$\left. \begin{aligned} J_n(\eta) &= J_n(\alpha \sqrt{i}) = (-1)^n [\text{ber}_n(\alpha) - i \text{bei}_n(\alpha)] \\ H_n^{(1)}(\eta) &= H_n^{(1)}(\alpha \sqrt{i}) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi} [\text{kei}_n(\alpha) + i \text{ker}_n(\alpha)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 69})$$

因此,方程(附 65)的全解可以写成如下的形式:

$$w_n(\alpha) = c_{1n} \text{ber}_n(\alpha) + c_{2n} \text{bei}_n(\alpha) + c_{3n} \text{ker}_n(\alpha) + c_{4n} \text{kei}_n(\alpha) \quad (\text{附 70})$$

利用以下的 Tomson 函数循环公式:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}_{n+1}(\alpha) &= -\frac{n\sqrt{2}}{\alpha} [\text{ber}_n(\alpha) - \text{bei}_n(\alpha)] - \text{ber}_{n-1}(\alpha) \\ \text{bei}_{n+1}(\alpha) &= -\frac{n\sqrt{2}}{\alpha} [\text{ber}_n(\alpha) + \text{bei}_n(\alpha)] - \text{bei}_{n-1}(\alpha) \\ \text{ker}_{n+1}(\alpha) &= -\frac{n\sqrt{2}}{\alpha} [\text{ker}_n(\alpha) - \text{kei}_n(\alpha)] - \text{ker}_{n-1}(\alpha) \\ \text{kei}_{n+1}(\alpha) &= -\frac{n\sqrt{2}}{\alpha} [\text{ker}_n(\alpha) + \text{kei}_n(\alpha)] - \text{kei}_{n-1}(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 71})$$

可将式(附 70)改用零阶 Tomson 函数或一阶导数表达出来。各种零阶 Tomson 函数及一阶导数的多项式为

$$\left. \begin{aligned} \text{ber} \eta &= 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\eta\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\eta\right)^8}{(4!)^2} - \dots \\ \text{ber}' \eta &= -\frac{\left(\frac{1}{2}\eta\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\eta\right)^7}{3!4!} - \dots \\ \text{bei} \eta &= \frac{\left(\frac{1}{2}\eta\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\eta\right)^6}{(3!)^2} + \dots \\ \text{bei}' \eta &= \frac{1}{2}\eta - \frac{\left(\frac{1}{2}\eta\right)^5}{2!3!} + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \ker \eta = \left( \ln \frac{2}{\eta} - \nu \right) \text{ber} \eta + \frac{\pi}{4} \text{bei} \eta - \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\left( \frac{1}{2} \eta \right)^4}{(2!)^2} \\
& \quad + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{\left( \frac{1}{2} \eta \right)^8}{(4!)^2} - \dots \\
& \ker' \eta = \left( \ln \frac{2}{\eta} - \nu \right) \text{ber}' \eta - \frac{1}{\eta} \text{ber} \eta + \frac{\pi}{4} \text{bei}' \eta \\
& \quad - \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\left( \frac{1}{2} \eta \right)^3}{1!2!} + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{\left( \frac{1}{2} \eta \right)^7}{3!4!} - \dots \\
& \text{kei} \eta = \left( \ln \frac{2}{\eta} - \nu \right) \text{bei} \eta - \frac{\pi}{4} \text{ber} \eta + \frac{\left( \frac{1}{2} \eta \right)^2}{(1!)^2} \\
& \quad - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\left( \frac{1}{2} \eta \right)^6}{(3!)^2} + \dots \\
& \text{kei}' \eta = \left( \ln \frac{2}{\eta} - \nu \right) \text{bei}' \eta - \frac{1}{\eta} \text{bei} \eta - \frac{\pi}{4} \text{ber}' \eta + \frac{1}{2} \eta \\
& \quad - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\left( \frac{1}{2} \eta \right)^5}{2!3!} + \dots
\end{aligned}
\tag{附 72}$$

对于二阶 Tomson 函数,其降阶关系式为

$$\left. \begin{aligned}
\text{ber}'' \eta &= -\text{bei} \eta - \frac{1}{\eta} \text{ber}' \eta \\
\text{bei}'' \eta &= \text{ber} \eta - \frac{1}{\eta} \text{bei}' \eta \\
\text{ker}'' \eta &= -\text{kei} \eta - \frac{1}{\eta} \text{ker}' \eta \\
\text{kei}'' \eta &= \text{ker} \eta - \frac{1}{\eta} \text{kei}' \eta
\end{aligned} \right\}
\tag{附 73}$$

如果式(附 65)中的  $n=0$ ,或  $n=1$ ,可分别简化为零阶 Tomson 函数或一阶 Tomson 函数来表达该方程的解,仅用式(附 72)和式(附 73)可以求解。

## 四、非线性微分方程的线性化

### 1. 摄动法

设有微分方程定解问题

$$\left. \begin{aligned}
L(u, x) &= 0 \\
B(u) &= 0
\end{aligned} \right\}
\tag{附 74}$$

式中,  $L$  为方程的微分算子;  $B$  为边界微分算子;  $u$  为自变量  $x$  的函数。已知当  $x \rightarrow x_0$  时问题的解为  $u = u_0$ , 现研究当  $x$  在  $x_0$  附近时,  $u$  对  $u_0$  的偏差, 这样的摄动方法叫坐标摄动法。在一般情况下渐近序列都是取幂函数序列  $\{(x - x_0)^n\}$ , 渐近展开式就是渐近幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ , 坐标摄动法也就是寻求微分方程的级数解。

通常在  $x_0 = 0$  时, 解  $u(x)$  的幂级数形式为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ 。

如果摄动问题是含有小参数  $\epsilon$  的微分方程定解问题, 则用参数  $\epsilon$  的函数构造渐近序列及渐近展开式求解, 这样的方法叫参数摄动法。

参数摄动法里有正则摄动与奇异摄动两类问题。

如果摄动问题是含小参数  $\epsilon$  的微分方程的定解问题  $P(\epsilon)$ , 即

$$P(\epsilon): \begin{cases} L_{\epsilon}[y(x, \epsilon)] = f(x, \epsilon) & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \\ B_{\epsilon, j}[y(x, \epsilon)] = \phi_j(x, \epsilon) & (j = 0, 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (\text{附 } 75)$$

式中,  $0 < \epsilon \leq 1$ ;  $L_{\epsilon}$  为方程的微分算子, 即

$$L_{\epsilon} = L_0 + \epsilon L_{1, \epsilon} \quad (\text{附 } 76)$$

$B_{\epsilon, j}$  表示定义在边界(或部分边界)上的微分算子。如果摄动问题  $P(\epsilon)$  的解  $y(x, \epsilon)$  能用一个  $\epsilon$  的幂级数表示, 即

$$y(x, \epsilon) \sim y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n y_n(x) \quad (\text{附 } 77)$$

并在区域  $\Omega$  中一致有效, 那么便称  $P(\epsilon)$  是区域  $\Omega$  中的正则摄动问题, 否则称为奇异摄动问题。

按以上所述的摄动参数  $\epsilon$  的表达式(附 76)式(附 77), 显然摄动方法能将非线性微分方程变为线性化方程, 它在非线性结构各种问题中有着广泛的应用。

正则摄动法主要有幂级数法、参数微分法等计算方法。下面以一个非线性常微分方程的初值为例, 说明以上方法的计算过程。

设控制微分方程

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = - \frac{gR^2}{(\bar{x} + R)^2} \quad (\text{附 } 78)$$

有初值条件

$$\bar{x}(0) = 0 \quad \left. \frac{d\bar{x}}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \quad (\text{附 } 79)$$

首先作无量纲参数的变换, 令

$$x = \frac{\bar{x}}{v^2/g} \quad t = \frac{\bar{t}}{v_0/g}$$

再引入小参数  $\epsilon$ , 并作为无量纲摄动参数, 即

$$\epsilon = \frac{v_0^2}{gR} \ll 1$$

重新表达式(附 78)与式(附 79),为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -(1 + \epsilon x)^{-2} \\ x(0) &= 0 \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 80)$$

进行摄动法求解式(附 80),设

$$x(t, \epsilon) \sim x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (\text{附 } 81)$$

式中,  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ...均为待定函数。再将式(附 80)右端用二项式展开的方法展成  $\epsilon$  的幂级数,即有

$$(1 + \epsilon x)^{-2} = 1 - 2\epsilon x + 3\epsilon^2 x^2 + \dots \quad (\text{附 } 82)$$

再将式(附 81)代入式(附 82)中,有

$$(1 + \epsilon x)^{-2} = 1 + \epsilon(-2x_0) + \epsilon^2(-2x_1 + 3x_0^2) + \dots \quad (\text{附 } 83)$$

再将式(附 81)、(附 83)代入式(附 80),比较  $\epsilon$  各次幂的系数,可得

$\epsilon^0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} &= -1 \\ x_0(0) &= 0 \quad \left. \frac{dx_0}{dt} \right|_{t=0} = -1 \end{aligned}$$

$\epsilon^1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= 2x_0 \\ x_1(0) &= 0 \quad \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

$\epsilon^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt^2} &= 2x_1 - 3x_0^2 \\ x_2(0) &= 0 \quad \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

分别求出上式的解为

$$\begin{aligned} x_0(t) &= t - \frac{1}{2}t^2 \\ x_1(t) &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 \\ x_2(t) &= -\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6 \end{aligned}$$

最后得出  $x(t, \epsilon)$  的解为

$$x(t, \epsilon) = t - \frac{1}{2}t^2 + \epsilon \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 \right)$$

$$+ \epsilon^2 \left( -\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6 \right) + \dots$$

参数微分法求解这一微分方程,是将  $x(t, \epsilon)$  在  $\epsilon=0$  附近展为泰勒级数,即

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x'(t, 0) + \frac{\epsilon^2}{2!} x''(t, 0) + \dots$$

式中,  $x'(t, \epsilon)$  为对参数  $\epsilon$  一次导数,  $x''(t, \epsilon)$  为对  $\epsilon$  的二次导数, 等等。

与幂级数方法相同, 这里把小参数  $\epsilon$  各次幂的系数取为  $x$  对参数  $\epsilon$  的各阶导数在  $\epsilon=0$  处的值, 下面分别求  $x_0(t), x'(t), x''(t) \dots$  满足的方程和初始条件:

[零阶]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= -1 \\ x_0(0) = 0 \quad \left. \frac{dx_0}{dt} \right|_{t=0} &= 1 \end{aligned}$$

解之得

$$x_0(t) = t - \frac{1}{2}t^2$$

[一阶]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= 2x_0 \\ x'(0) = 0 \quad \left. \frac{dx'}{dt} \right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

解之得

$$x'(t, 0) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4$$

[二阶]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x''}{dt^2} &= 4x' - 6x_0^2 \\ x''(0) = 0 \quad \left. \frac{dx''}{dt} \right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

解之得

$$x''(t, 0) = -\frac{1}{2}t^4 + \frac{11}{30}t^5 - \frac{11}{180}t^6$$

最后得  $x(t, \epsilon)$ , 为

$$x(t, \epsilon) = t - \frac{1}{2}t^2 + \epsilon \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 \right) - \epsilon^2 \left( -\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6 \right) + \dots$$

这与幂级数解法的结果完全一致。

摄动法除正则摄动法外, 还有奇异摄动法。奇异摄动法又分诸多方法。这里仅介绍其中的变形参数法。

设有形如

$$\left. \begin{aligned} y'' + \omega^2 y &= f(y, y', \epsilon) \\ y(0) &= a \quad y'(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 84)$$

形式的微分方程初值问题。

事实上式(附 84)中的方程,一般有周期解,直接展开要出现周期项,所以  $\omega$  也要展开成

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (\text{附 } 85)$$

式中,  $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \dots$  都是待定的。只要适当挑选  $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \dots$  就可以消除各级近似解中出现的长期项。例如当方程  $\omega=1$  时,则有

$$1 = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \dots \quad (\text{附 } 86)$$

在  $\omega=1$  时,设式(附 84)的方程为

$$y'' + (1 + \epsilon)y = 0 \quad (\text{附 } 87)$$

将  $y$  也展开,式(附 87)为

$$(y''_0 + \epsilon y''_1 + \dots) + (\omega_0 + \epsilon \omega_1 + \dots)(y_0 + \epsilon y_1 + \dots) + \epsilon(y_0 + \epsilon y_1 + \dots) = 0$$

比较  $\epsilon$  各次幂的系数,式(附 84)会有

$\epsilon^0$ :

$$\left. \begin{aligned} y''_0 + \omega_0 y_0 &= 0 \\ y_0(0) &= a \quad y'_0(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 88)$$

解之得

$$y_0 = a \cos \sqrt{\omega_0} x$$

$\epsilon^1$ :

$$\left. \begin{aligned} y''_1 + (1 + \omega_1)y_0 + \omega_0 y_1 &= 0 \\ y''_1 + \omega_0 y_1 &= -(1 + \omega_1)y_0 = -(1 + \omega_1)a \cos \sqrt{\omega_0} x \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 89)$$

方程的齐次通解为

$$A \cos \sqrt{\omega_0} x + B \sin \sqrt{\omega_0} x$$

如果在上面方程中取  $\omega_1 = -1$ , 那就不存在非齐次特解。这时

$$1 = \omega_0 - \epsilon$$

式(附 88)的解为

$$y_0 = a \cos \sqrt{1 + \epsilon} x$$

即为精确解。

如果引入自变量展开式

$$x = s(1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) \quad (\text{附 } 90)$$

式中,  $\omega_1, \omega_2$  都是常数, 则有

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{ds} \quad \frac{ds}{dx} = (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots)^{-1} \frac{d}{ds} \quad (\text{附 } 91)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = (1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots)^{-2} \frac{d^2}{ds^2} \quad (\text{附 } 92)$$

把式(附 90)代入式(附 87),并代入式(附 91)、(附 92),比较各  $\epsilon$  次幂的系数,得

$\epsilon^0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_0}{ds^2} + y_0 &= 0 \\ y_0(0) &= a \quad y_0'(0) = 0 \end{aligned}$$

解之得

$$y_0 = a \cos s$$

$\epsilon^1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{ds^2} + y_1 &= -(2\omega_1 + 1)y_0 = -(2\omega_1 + 1)a \cos s \\ y_1(0) &= 0 \quad y_1'(0) = 0 \end{aligned}$$

为消除特解中的长期项,可以令

$$2\omega_1 + 1 = 0$$

这样  $y_1$  就只有通解,并为

$$y_1 = A \cos s + B \sin s$$

为满足定解条件  $y_1(0)=0, y_1'(0)=0$ , 必须满足  $A=B=0$ , 实际上  $y$  仅有一项, 即

$$\begin{aligned} y &\approx y_0 = a \cos s \\ x &\approx s \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \quad s \approx x \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} + \dots \right) \\ y &\approx a \cos \left[ \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) x \right] + \dots \end{aligned}$$

与该问题的精确解完全一致。

这一方法相当于对自变量作线性变换,引进新的参数,在求解过程中通过选择参数来消除逐级存在的长期项,以求得一致有效的渐近展开式。

## 2. 步进求和方法

步进求和方法又称增量求和方法,它也是将非线性方程变为线性方程的有效手段。它的基本思想是将非线性方程的变量无量纲化,即对每一变量形成远小于 1 的无量纲量,以便形成小于 1 的展开级数;然后,将方程的某一阶段的求解划分为许多小段,每一小段的变化可以视为在前一阶段基础上的小变化。就像前一段变化结束为初始变化,则一个荷载的小增量带来非线性方程的小变化,而这一小变化可以视为线性变化。当整个变化小阶段划分越多,越符合线性变化的物理特征,每次计算的误差就越小;最后再将各阶段的结果求和,就会得到原非线性方程的解答,而这一解答是可用简单的解析式表达的。

对非线性方程来说,如将整个由荷载引起的各变量的变化分成  $n$  步,其中对第

$i$  步来说,前  $i-1$  步各变量的和即为方程的第  $i$  步的初值,它本身必须满足非线性方程,再将  $i$  步加入,前  $i$  步之和的各变量之和也满足非线性方程,两者之差即第  $i$  步变化的方程。在略去高阶小量基础上,会将非线性方程简化为线性方程,由此比较容易求出第  $i$  步的变量。将各变量的第  $i$  步分别相加,令  $n \rightarrow \infty$ ,取级数的极限,则会求得相应的变量的结果。

现以轴对称球扁壳的非线性挠度方程为例说明如下计算过程:

设  $q$  为壳面法向荷载,  $D$  为壳抗弯刚度,  $w$  为壳面挠度,则非线性方程为

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) &= \psi + \frac{h}{r} \frac{d\phi}{dr} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{dz}{dr} \right) \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \phi) &= -\frac{E}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 } 93)$$

式中,  $h$  为壳厚。另外有

$$\psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr \quad \nabla^2 (-) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d(-)}{dr} \right]$$

式中,  $z$  为扁壳的形状方程,可把它视为圆板大挠度变形时的初挠度  $z=w_0$ 。再把扁壳变形全过程分成若干步,其  $i-1$  步的各变量分别为

$$W = \sum_{k=0}^{i-1} w_k \quad \Phi = \sum_{k=0}^{i-1} \phi_k \quad \Psi = \sum_{k=0}^{i-1} \psi_k$$

再把这些量作为初值,加入第  $i$  步的变化,可得第  $i$  步结束时的各变量,为

$$w = W + w_i \quad \phi = \Phi + \phi_i \quad \psi = \Psi + \psi_i \quad \bar{W} = W + W_0$$

引入各量的无量纲表达

$$\begin{aligned} \bar{W}^* &= \frac{\bar{W}}{h} \quad \rho = \frac{r}{a} \quad \Phi^* = \frac{\Phi}{Eh^2} \quad \phi^* = \frac{\phi}{Eh} \\ w^* &= \frac{w_i}{h} \quad \psi^* = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho q_i^* \rho d\rho \quad q^* = \frac{q_i}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^4 \end{aligned}$$

式中,  $a$  为壳底水平半径,  $r$  为变量。

利用以上变化可求出每一步下的式(附 93)为

$$\begin{aligned} \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 w^*) &= \frac{q^*}{2} \rho + \frac{1}{\rho} (M_1 \rho + M_3 \rho^3 + M_5 \rho^5 + M_7 \rho^7) \\ &\quad \cdot [-4\xi_i \rho (\alpha - \rho^2)] + \frac{1}{\rho} (m_{1i} \rho + m_{3i} \rho^3 + m_{5i} \rho^5 \\ &\quad + m_{7i} \rho^7) \left[ 2\xi_0 \rho - \sum_{k=0}^{i-1} 4\xi_k \rho (\alpha - \rho^2) - 4\xi_i \rho (\alpha - \rho^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{附 } 94)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (\nabla^2 \phi^*) &= -8\xi_i^2 \rho (\alpha - \rho^2)^2 + 8\xi_0 \xi_i \rho (\alpha - \rho^2) \\ &\quad - 16\xi_i \rho (\alpha - \rho^2) \sum_{k=0}^{i-1} \xi_k \end{aligned} \quad (\text{附 } 95)$$

式中



$$\zeta_0 = \frac{f_0}{h} \quad w^* = \zeta_i (a - \rho^2)^2$$

其中,  $f_0$  为扁壳初始矢高; 各  $M_i, m_{ij}$  为常数。

显然式(附 94)、(附 95)即是将原非线性方程经过无量纲化后各变量间的线性化方程。继续利用边界条件求出这一新的方程, 可获得第  $i$  步的用级数表达的解, 再求积分, 则会得到解析形式的解。

本节的内容在第七章曾作过详尽讲述及应用。

## 参 考 文 献

- [1] [苏]C. A. 阿姆巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论. 北京: 中国铁道出版社, 1986
- [2] 董石麟等. 我国空间钢结构发展中的新技术、新结构. 土木工程学报, 1998, 31(6): 1~11
- [3] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1982
- [4] 黄与宏. 板结构. 北京: 人民交通出版社, 1992
- [5] 贾乃文. 混凝土特种结构力学分析与设计计算. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993
- [6] 贾乃文. 粘塑性力学及工程应用. 北京: 地震出版社, 2000
- [7] 金向鲁. 空间结构分析. 北京: 中国建筑工业出版社, 1996
- [8] 金向鲁. 悬挂结构计算. 北京: 中国建筑工业出版社, 1975
- [9] 钱若军等. 网壳结构设计. 北京: 中国建筑工业出版社, 1998
- [10] 沈聚敏等. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析. 北京: 清华大学出版社, 1993
- [11] 沈世钊等. 悬索结构设计. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997
- [12] 沈祖炎等. 网架与网壳. 上海: 同济大学出版社, 1997
- [13] 铁摩辛柯. 沃诺斯基. 板壳理论. 北京: 科学出版社, 1977
- [14] 徐秉业等. 结构塑性极限分析. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985
- [15] 严宗达. 结构力学中的傅里叶级数解法. 天津: 天津大学出版社, 1989
- [16] 杨耀乾. 薄壳理论. 北京: 中国铁道出版社, 1981
- [17] 杨耀乾. 平板理论. 北京: 中国铁道出版社, 1980
- [18] Victor Gioncu. This Reinforced Concrete Shells(special analysis problems). 1980